Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Sulle trasformazioni cremoniane che conservano le aree od i volumi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.4, p. 388–392.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_388_0>

Sulle trasformazioni cremoniane che conservano le aree od i volumi.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna).

Sunto. - *Si dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione cremoniana, fra piani o spazi affini, conservi le aree od i volumi.*

1. Il VILLA in alcune sue recenti conferenze [1] ha segnalato fra l'altro l'interesse di ricercare fra i vari tipi di speciali trasformazioni puntuali (caratterizzate da proprietà differenziali *in grande* di varia natura) quelle algebriche e in particolare quelle birazionali. Il VILLA, in particolare, mi ha proposto di ricercare le trasformazioni cremoniàne fra piani o spazi che conservano rispettivamente le aree od i volumi [2].

Nella presente Nota do una condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione cremoniana fra piani affini conservi le aree. La predetta condizione permette di costruire numerosi esempi di trasformazioni del tipo suddetto, alcuni dei quali vengono qui indicati. Rimane però da risolvere il problema della co-

(1) M. VILLA, *Per una geometria proiettiva differenziale in grande delle trasformazioni puntuali,* Atti IV° Congr. U. M. I., Messina-Taormina, 1951; M. VILLA, *Transformations ponctuelles et transformations crémoniennes,* Colloque de Géométrie Algébrique, Centre Belge de Recherches Mathématiques, Liège, 1952; Colloque de Topologie et de Géométrie Différentielle, Strasbourg, 1952; M. VILLA, *Ricerca di particolari tipi di trasformazioni puntuali e cremoniane,* III Oesterreichischer Mathematiker Kongress, Salzburg, 1952.

(2) In un recente lavoro di V. ALDA, (*Sur les propriétés affines des correspondances analytiques,* Cas. pro Pest. Mat. Fys., 75 (1950), 51-67) viene trattato fra l'altro il problema di determinare le trasformazioni fra piani che conservano le aree. In esso vengono determinate soltanto le trasformazioni di quel tipo che sono di 2ª (o di 3ª) specie, cioè hanno, per ogni coppia regolare di punti corrispondenti, due (o tre) direzioni caratteristiche coincidenti. Sulle trasformazioni che conservano le aree vi è anche un vecchio lavoro di A. F. MÖBIUS, *Ueber eine allgemeiner Art der Affinität geometrischer Figuren,* « Journ. f. Reine u. Angew. Math. », 12 (1834), 109-133.

struzione di tutte le trasformazioni cremoniane che godono della proprietà considerata, le quali manifestamente costituiscono un gruppo G_A; al proposito si fanno alcune osservazioni nel n. 2. L'estensione di tutto ciò che verrà esposto nei nn. 1, 2 al caso di trasformazioni fra spazi affini non presenta difficoltà e vi accennerò nel n. 3.

Sussiste la seguente proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè, in una trasformazione cremoniana fra piani affini, aree corrispondenti siano in un rapporto costante è che punti impropri si corrispondano (3) *e che la curva Jacobiana (in ciascun piano) sia composta di una curva* Γ *contata tre volte, la quale curva* Γ, *insieme con la retta impropria, costituisca una curva della rete omaloidica.*

La necessità della condizione si verifica semplicemente. Se

$$x' = \frac{f_1(x, y)}{f_3(x, y)}, \qquad y' = \frac{f_2(x, y)}{f_3(x, y)} \tag{1}$$

sono le equazioni di una trasformazione cremoniana T, fra i piani $\pi(x, y)$ e $\pi'(x', y')$, la T conserva le aree se, e solo se

$$R(x, y) = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}$$

è una costante, com'è subito visto.

Indichiamo con x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane omogenee di π, definite da $x = \dfrac{x_1}{x_3}$, $y = \dfrac{x_2}{x_3}$, e poniamo

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = x_3^{n_i} \cdot f_i\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) \text{ (4)} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

essendo n_i il grado del polinomio f_i. Indichiamo infine con $\overline{R}$ la funzione $R\left(\dfrac{x_1}{x_3}, \dfrac{x_2}{x_3}\right)$. Si può supporre che sia $n_1 \geq n_2$ e distinguere i tre casi:

(a) $n_1 \geq n_2 > n_3 (n_2 = n_1 - l, \quad n_3 = n_1 - l - p, \quad l \geq 0, \quad p > 0)$

(b) $n_1 > n_3 \geq n_2 (n_2 = n_1 - l - p, \quad n_3 = n_1 - p, \quad l \geq 0, \quad p > 0)$

(c) $n_3 \geq n_1 \geq n_2 (n_2 = n_1 - l, \quad n_3 = n_1 + p, \quad l \geq 0, \quad p \geq 0)$.

Sia

$$J \equiv \frac{\partial(x_1', x_2', x_3')}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$$

(3) Intendiamo con ciò che non vi siano coppie *regolari* di punti corrispondenti dei quali uno solo improprio.

(4) Si osservi che nessuno dei polinomi F_i contiene il fattore x_3.

il primo membro dell'equazione della curva Jacobiana di T nel piano π; semplici calcoli conducono all'una o l'altra delle seguenti identità:

$$\text{(a)} \qquad J \equiv n_1 \cdot \overline{R} \cdot F_3^3 \cdot x_3^{3(l+p-1)}$$

$$\text{(b)} \qquad J \equiv n_1 \cdot \overline{R} \cdot F_3^3 \cdot x_3^{3(p-1)}$$

$$\text{(c)} \qquad x_3^3 J \equiv (n_1 + p) \cdot \overline{R} \cdot F_3^3.$$

Dalle precedenti identità segue subito che se $\overline{R}$ è una costante il caso (c) non può presentarsi; dalle (a), (b) segue la necessità della condizione enunciata, notando che deve essere, rispettivamente, $l + p \geq 1$, $p \geq 1$.

Veniamo alla sufficienza. Siano

$$x_i' = \Phi_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

le equazioni, in coordinate cartesiane omogenee, di una trasformazione cremoniana T, soddisfacente alla condizione enunciata in principio, i polinomi Φ_i non avendo nessun fattore (non costante) comune. Se $J = 0$ è l'equazioue della curva Jacobiana del piano π dovrà essere, per ipotesi

$$\text{(2)} \qquad x_3^3 J \equiv (\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \lambda_3\Phi_3)^3 \qquad (\lambda_i \text{ costanti}).$$

Ma poichè a punti impropri debbono (per ipotesi) corrispondere soltanto punti impropri o in altri termini alla retta impropria di un piano deve corrispondere la retta impropria dell'altro (escluse eventuali parti della Jacobiana), dovrà ogni punto proprio di $\Phi_3 = 0$ appartenere anche a $J = 0$. La (2) si riduce dunque alla

$$x_3^3 J \equiv \lambda\Phi_3^3 \qquad (\lambda \text{ costante})$$

e da questa segue l'asserto, quando si tengano presenti i calcoli che conducono alle identità (a), (b), (c) scritte prima.

Dalla proposizione ora dimostrata segue subito che: *Se una trasformazione cremoniana, fra piani affini, conserva le aree, i suoi punti singolari (in ciascun piano) sono tutti impropri.*

2. L'ultima osservazione del precedente n. permette di determinare tutte le trasformazioni di De Jonquieres, fra piani affini, che conservano le aree. Infatti si potrà porre il punto singolare multiplo, che deve essere improprio, nel punto improprio dell'asse della x (in ciascun piano) e questo permette di scrivere le equazioni della trasformazione nella ben nota forma

$$\text{(3)} \qquad x' = \frac{\alpha(y)x + \beta(y)}{\gamma(y)x + \delta(y)}, \qquad y' = \frac{ay + b}{cy + d}$$

dove α, β, γ, δ sono polinomi in y ed a, b, c, d delle costanti. Semplici calcoli mostrano poi che la (3) conserva le aree soltanto se si riduce (a meno di un cambiamento del riferimento in ciascun piano) ad:

$$x' = x + F(y), \qquad y' = y, \tag{4}$$

oppure ad

$$x' = xy^2 + F(y), \qquad x' = \frac{1}{y} \tag{5}$$

dove $F(y)$ è una qualsiasi funzione razionale in y.

La (4) è una trasformazione di De Jonquières che in ciascun piano possiede un unico punto singolare, essendo tutti i punti singolari semplici infinitamente vicini a quello multiplo. Nella (5) invece, in uno almeno dei due piani, tre dei punti singolari semplici sono infinitamente vicini fra loro (su una retta) ma non al punto singolare multiplo al quale sono infinitamente vicini tutti gli altri punti singolari semplici.

Per terminare osserviamo che il gruppo G_A delle trasformazioni cremoniane, fra piani affini, che conservano le aree non è generato ([5]) dalle trasformazioni quadratiche contenute in esso. Infatti si consideri la trasformazione cubica

$$x' = x + y^3, \qquad y' = y \tag{6}$$

che è del tipo (4) e nella quale i quattro punti singolari semplici sono infinitamente vicini a quello doppio su un ramo del secondo ordine. Orbene si vede senza difficoltà che una trasformazione quadratica del gruppo G_A non riesce a ridurre la singolarità del sistema omaloidico delle cubiche relativo alla (6), neppure innalzando l'ordine delle curve del sistema. È chiaro pertanto che la (6) non può ottenersi come prodotto di trasformazioni quadratiche di G_A.

3. Il risultato enunciato nel n. 1 si può estendere senza difficoltà alcuna alle trasformazioni cremoniane fra spazi affini ad n dimensioni S_n. Mi limiterò a dare l'enunciato dell'estensione.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè in una trasformazione cremoniana fra due spazi S_n *affini sia costante il rapporto di ipervolumi* ([6]) *corrispondenti è che punti impropri si corrispondano* ([7])

([5]) Contrariamente a quanto, come è ben noto, accade per il gruppo totale delle trasformazioni cremoniane. Le trasformazioni quadratiche contenute in G_A rientrano nel tipo (4) e sono tali che le coniche della rete omaloidica hanno contatto del secondo ordine in un punto improprio.

([6]) Definiti al solito per estensione della ordinaria nozione di volume.

([7]) Cfr. la ([3]).

e che la ipersuperficie Jacobiana (in ciascuno spazio) sia composta di una ipersuperficie Σ contata n + 1 *volte, la quale ipersuperficie Σ, insieme con l'iperpiano improprio, costituisca una ipersuperficie del sistema omaloidico.*

Anche ora si possono facilmente costruire esempi di trasformazioni del tipo considerato. Ad esempio la trasformazione

$$x_i' = x_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n - 1)$$

$$x_n' = x_n + x_1^2,$$

dove x_j', x_j sono coordinate cartesiane (non omogenee), può considerarsi sotto un certo aspetto la più semplice (escluse naturalmente le affinità) fra quelle che godono della proprietà di conservare gli ipervolumi; essa è ovunque regolare, al finito, e le superficie del sistema omaloidico sono coni quadrici specializzati $n - 2$ volte (S_{n-3} — coni).