BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

C. T. Rajagopal

Sui criteri del rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.4, p. 382–387.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_382_0>

Sui criteri del rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi

Nota di C. T. RAJAGOPAL (a Madras, India).

Sunto. - *I classici teoremi basati sui criteri del rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi, ed alcuni nuovi, possono essere stabiliti confrontando le serie con un conveniente integrale.*

L'oggetto di questo lavoro è di mettere la trattazione di C. BONFERRONI sulle serie positive [1] in relazione con altri lavori sullo stesso argomento [2, 3. 5, 6, 7] che completano quelli classici conosciuti [4].

Il criterio di D'ALEMBERT per la convergenza delle serie positive può essere formulato così.

I. *Condizione sufficiente per la convergenza di* Σu_n, $u_n > 0$, *è*

$$\Delta \log u_n \equiv \log u_{n+1} - \log u_n \leq -\varepsilon < 0.$$

Questo risulta subito dal confronto di Σu_n con $\Sigma e^{-\varepsilon n}$ e in analogia al criterio di KUMMER [1, p. 224] è naturalmente legato al confronto del seguente integrale.

II. *Sia* $u_x > 0$ *una funzione di* $x > 0$ *con derivata continua. Sia*

$\int \frac{dx}{k_x} = \infty$. *Allora la condizione*

$$\frac{d \log u_x}{dx} \leq f(x) \equiv -\frac{k_x' + \varepsilon}{k_x}, \qquad \varepsilon > 0,$$

assicura la convergenza di $\int^{\infty} u_x dx$.

Per provare II confrontiamo semplicemente $\int^{\infty} u_x dx$ con l' integrale convergente

$$\int^{\infty} \exp\left(\int^{x} f(t)dt\right) dx = \int^{\infty} e^{-\varepsilon y} dy, \quad y = \int^{x} \frac{dt}{k_t}.$$

Il seguente risultato è una estensione di I che può essere riguardato anche come una estensione di II.

III. *Supponiamo che* $\{D_n\}$ *sia una successione nella quale*

$$0 \leq D_1 < D_2 < \dots, \quad D_n \to \infty, \quad \Delta D_n = D_{n+1} - D_n = O\ (1).$$

Supponiamo che Σu_n, $u_n > 0$, *sia una serie soddisfacente la disuguaglianza*

$$(1) \qquad \frac{\Delta \log u_n}{\Delta D_n} \leq f(D_{n+1})$$

$\left(o\ \frac{\Delta \log u_n}{\Delta D_n} \geq f(D_{n+1})\right)$,
dove $f(x)$ *è una funzione di* $x > 0$ *con derivata* $f'(x)$ *continua, tale che*

$$\int^{\infty} |f'(x)|\, dx < \infty.$$

Allora la condizione

$$(2) \qquad \int^{\infty} \exp\left(\int^{x} f(t)dt\right) dx < \infty,$$

$\left(o \int^{\infty} \exp\left(\int^{x} f(t)dt\right) dx = \infty\right)$, *è sufficiente per la convergenza (o divergenza) di* $\Sigma u_n \Delta D_n$.

III è stato dato da me altrove [5, Teorema II] con alcune piccole differenze. La sua prova è qui sotto delineata per completezza.

Prendendo il caso della convergenza III, noi troviamo dal primo caso della (1):

$$\frac{\log (u_{\nu+1}/u_\nu)}{D_{\nu+1} - D_\nu} \leq f(t) + \int_t^{D_{\nu+1}} f'(x) dx$$

$$\leq f(t) + \int_{D_\nu}^{D_{\nu+1}} |f'(x)|\, dx, \qquad D_\nu \leq t < D_{\nu+1}.$$

Integrando l'ultima disuguaglianza da D_ν a $D_{\nu+1}$, e sommando le disuguaglianze che ne risultano quando si faccia $\nu = m, m+1, \ldots, n-1$, otteniamo

$$\log(u_n / u_m) < \int_{D_m}^{D_n} f(t)dt + k, \qquad k = \text{costante},$$

dalle ipotesi $\Delta D_n = O(1)$ e $\int^{\infty} | f'(x) | \, dx < \infty$. Quindi

$$\log(u_n / u_m) < \int_{D_m}^{x} f(t)dt - \int_{D_n}^{x} f(t)dt \qquad (D_n \leq x < D_{n+1})$$

$$< \int_{D_m}^{x} f(t)dt + k_1 + k, \qquad k_1 = \text{costante},$$

a causa dèlla limitatezza di $f(x)$ per $x \geq \delta > 0$ e della condizione $\Delta D_n = O(1)$.

Scrivendo le disuguaglianze ottenute sopra nella forma

$$u_n < u_m e^{k_1+k} \exp\Big(\int_{D_m}^{x} f(t)dt\Big), \qquad D_n \leq x < D_{n+1},$$

ed integrando da D_n a D_{n+1}, otteniamo

$$u_n \Delta D_n < u_m e^{k_1+k} \int_{D_n}^{D_{n+1}} \exp\Big(\int_{D_m}^{x} f(t)dt\Big) dx.$$

Ciò conduce immediatamente al caso della convergenza in III.

Il caso della divergenza viene stabilito in modo analogo.

III è notevole perchè riunisce in sè diversi risultati apparentemente distinti.

III - (i) *Scrivendo in* III

$$\Delta D_n = d_{n+1}, \qquad u_n \Delta D_n = u_n d_{n+1} = a_{n+1},$$

troviamo che la speciale scelta $f(x) = -\varepsilon < 0$ *dà il criterio di* KUMMER, *cioè che la condizione o*

$$\frac{1}{d_{n+1}} \log \frac{a_{n+2} / d_{n+2}}{a_{n+1} / d_{n+1}} \leq -\varepsilon < 0, \qquad d_n = O\ (1),$$

oppure

$$\frac{1}{d_{n+1}} \left(\frac{a_{n+2} / d_{n+2}}{d_{n+1} / d_{n+1}} - 1\right) \leq -\varepsilon < 0,$$

delle quali la prima implica la seconda giacchè $\log \xi \leq \xi - 1$ $(\xi > 0)$, *assicura la convergenza di* $\Sigma\, a_{n+1}$, $a_{n+1} > 0$.

III - (ii) *Ristabilendo* III *per* $\Sigma a_{n+1} = \Sigma u_n \Delta D_n$, *con* f(x) *scelta successivamente come nella Nota di* BONFERRONI [1, p. 224], *cioè con*

$$f(x) = -\frac{1+\varepsilon}{x}, \quad f(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1+\varepsilon}{x\log x},$$
$$f(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x\log x} - \frac{1+\varepsilon}{x\log x \log_2 x}, \text{ etc.},$$

dove ε *è un qualsiasi numero reale, si ottiene una generalizzazione dei criteri associati ai nomi di* BERTRAND *e* DE MORGAN.

Si osserverà che gli integrali di confronto in III-(i), III-(ii) sono esprimibili nella stessa forma come in II:

$$\int^{\infty} e^{-\varepsilon y}\, dy \quad \text{con} \quad y = x, \log x, \log_2 x, \ldots \text{ successivamente.}$$

III-(iii). *Se* Σu_n, $u_n > 0$, *è una data serie ed* r(x) *è una funzione tale che* $r(n) = r_n = u_{n+1}/u_n$, $0 < A \leq r(n) \leq B$, $r'(x)$ *esiste ed è continua*, $\int^{\infty} |r'(x)|\, dx < \infty$, *allora noi possiamo prendere in* III, $D_{n+1} = n$, $f(x) = \log r(x)$, *e concludere che* Σu_n *converge o diverge con l' integrale*

$$\int^{\infty} \exp\left(\int^{x} \log r(t)dt\right) dx, \qquad \text{[BRINK, 2, Teorema III].}$$

Le seguenti due deduzioni da III sono criteri per la convergenza (o divergenza) di Σu_n, $u_n < 0$, implicanti il doppio rapporto $(u_{n+2}/u_{n+1})/(u_{n+1}/u_n)$.

III - (iv). *Supponiamo che* Σu_n, $u_n < 0$, *sia una serie soddisfacente la condizione* $u_{n+1}/u_n \to 1$ *quando* $n \to \infty$ *e la disuguaglianza*:

$$(3) \qquad \Delta^2 \log u_n \geq g(n), \qquad \Delta^2 \log u_n \equiv \Delta(\log u_{n+1} - \log u_n)$$

(*o* $\Delta^2 \log u_n \leq g(n)$), *dove* g(x) *è una funzione di* $x > 0$ *tale che*

$$g(x) \downarrow 0$$

quando

$$0 < x_0 \leq x \to \infty, \qquad \int^{\infty} g(x)dx < \infty.$$

Allora la condizione

$$(4) \qquad \int^{\infty} \exp\left(-\int^{x} dt \int_{t}^{\infty} g(u)\, du\right) dx < \infty$$

$\left(o \int^{\infty} \exp\left(-\int^{x} dt \int_{t}^{\infty} g(u)du\right) dx = \infty\right)$ *assicura la convergenza (o la divergenza) di* Σu_n.

Per provare la parte che riguarda la convergenza di III-(iv), sommiamo le disuguaglianze nel primo caso della (3) per $n, n+1, n+2, \dots$ e otteniamo la seguente disuguaglianza per tutti i grandi n, usando le condizioni $\Delta \log u_{n+1} \to 0$ e $\Sigma g(n) < \infty$,

$$-\Delta \log u_n \geq g(n) + g(n+1) + \dots$$
$$\geq \int_n^\infty g(u)du = -f(n), \qquad f(x) \equiv \int_x^\infty g(u)du.$$

Quindi il primo caso della (3) implica il primo caso della (1) con $f(x)$ scelta come sopra e $D_{n+1} = n$, mentre il primo caso della (4) si riduce al primo caso della (2) con la stessa scelta $f(x)$. Conseguentemente il caso della convergenza di III-(iv) è una deduzione del corrispondente caso della III.

Il caso della divergenza della III-(iv) può essere dedotto da quello della III nello stesso modo osservando che il secondo caso di (3) dà

$$-\Delta \log u_{n+2} \leq g(n+2) + g(n+3) + \dots$$
$$\leq \int_{n+1}^\infty g(u)du = -f(n+1), \qquad f(x) \equiv -\int_x^\infty g(u)du,$$

che è il secondo caso della (1) avendo scelto $f(x)$ come sopra e $D_{n+3} = n+1$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

III-(v). *Sia* $\Sigma \mathrm{u_n}$, $\mathrm{u_n} > 0$, *una serie in cui* $\mathrm{u_{n+1}} / \mathrm{u_n} \to 1$ *quando* $\mathrm{n} \to \infty$. *Sia* $\mathrm{R(x)}$ *una funzione di* $\mathrm{x} > 0$ *tale che*

$$R(x) \geq R(x') \qquad per \qquad x' > x > 0,$$
$$R(n) = R_n = \frac{u_{n+2} / u_{n+1}}{u_{u+1} / u_n}.$$

Allora $\Sigma \log \mathrm{R_n} < \infty$, *così che* $\int^\infty \log \mathrm{R(x)dx} < \infty$, *e possiamo prendere* $\mathrm{g(x)} = \log \mathrm{R(x)}$ *in* III-(iv), *concludendone che la serie* $\Sigma \mathrm{u_n}$ *converge o diverge con l'integrale*

$$\int^\infty \exp\left(-\int^x dt \int_t^\infty \log R(u)du\right) dx, \qquad \text{[Brink, 2, Teorema VI].}$$

Brink [2, Teorema VII] ha dato anche una variante di III-(v) mentre Margaret Martin [3, Teoremi 1, 2] ha dedotto da III-(v) successioni di criteri di doppio rapporto per la convergenza delle serie a termini positivi in analogia a quelle di Bertrand-De Morgan di criteri del rapporto ordinari. Una delle successioni di

MARTIN [3, Teorema 1] è più naturalmente da riguardarsi come il risultato della scelta di $g(x)$ in III-(iv) successivamente, così che

$$f(x) \equiv - \int_x^\infty g(u)du$$

diviene a sua volta ciascuna delle funzioni in III-(ii). Per esempio, due fra i criteri di questa successione corrispondono alle prime due scelte di $f(x)$ in III-(ii), e possono essere stabiliti come sotto.

Sia Σu_n, $u_n > 0$, *una serie nella quale* $u_{n+1}/u_n \to 1$ *quando* $n \to \infty$. *Allora* Σu_n *è convergente (oppure, divergente) quando una delle seguenti condizioni è soddisfatta:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \log n(n^2 \log R_n - 1) > 1) \quad (\textit{oppure}, < 1), \\ \lim\limits_{n\to\infty} \log_2 n \,|\log n(n^2 \log R_n - 1) - 1| > 1 \ (\textit{oppure}, < 1). \end{array}\right\} R_n = \frac{u_{n+2}/u_{n+1}}{u_{n+1}/u_n}.$$

Si può dire in conclusione che la nostra indagine sulla convergenza delle serie a termini positivi può essere resa formalmente più completa estendendola in modo tale che includa:

a) un criterio del rapporto per la convergenza delle serie a termini complessi, similmente alla successione generalizzata di criteri in III-(ii) di BERTRAND-DE MORGAN, che conduce al classico criterio di WEIERSTRASS quando $D_n = n$ [6, p. 182].

b) criteri del rapporto per le serie a termini positivi in cui si usi una successione $m_n \downarrow 0$ in luogo della successione $D_n \uparrow \infty$, un esempio essendo dato da un criterio per la divergenza delle serie a termini positivi, analogo al criterio di convergenza di KUMMER in III-(i) [7, p. 568].

BIBLIOGRAFIA

1. C. BONFERRONI, « Boll. Un. Mat. It. », Serie III, 5 (1950), pp. 218-225.
2. R. W. BRINK, « Ann. of Math. », Second Series, 21 (1919-20), pp. 39-60.
3. M. MARTIN, « Bull. Amer. Math. Soc. », 47 (1941), pp. 452-457.
4. A. PRINGSHEIM, « Math. Annalen », 35 (1890), pp. 297-394.
5. C. T. RAJAGOPAL, « Jour. Ind. Math. Soc. », New Series, 3 (1938), pp. 118-125.
6. C. T. RAJAGOPAL, « Amer. Math. Monthly », 48 (1941), pp. 180-185.
7. C. T. RAJAGOPAL, « Amer. Math. Monthly », 51 (1944), pp. 566-570.