
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DARIO GRAFFI

Sul problema della derivata obliqua.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 7
(1952), n.4, p. 378–382.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_378_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sul problema della derivata obliqua (*).

Nota di DARIO GRAFFI (a Bologna).

Sunto. Come il primo paragrafo

1. In una Nota, pubblicata in questo fascicolo del Bollettino della U. M. I., il Prof. FICHERA ha ricavato una condizione affinché sia possibile il problema che, per brevità, diremo della derivata obliqua. Alludiamo alla ricerca di una funzione W delle due variabili x, y armonica e regolare ⁽¹⁾ in un dominio D , riferito ad un sistema di assi x, y , limitato dalla linea c su cui è assegnata la derivata $\frac{\partial W}{\partial l}$ di W lungo una direzione l che forma colla normale n a c (orientata verso l'esterno di D) un angolo Θ ⁽²⁾, che chiameremo angolo di obliquità. La condizione del FICHERA è la seguente:

$$(1) \quad \int_c |f(z)| \frac{\partial W}{\partial l} dc = 0,$$

dove $f(z)$ è una funzione analitica regolare nel dominio D della variabile complessa $z = x + iy$ e tale che su c il suo argomento valga l'angolo di obliquità Θ ; ovviamente $|f(z)|$ indica il modulo di questa funzione.

Ora, problemi di derivata obliqua si sono presentati al VOLTERRA quando — poco meno di quarant'anni fa ⁽³⁾ — ha sviluppato la teoria delle correnti stazionarie in una lamina metallica soggetta ad un campo magnetico, cioè la teoria matematica dei fenomeni di HALL e di CORBINO. Più precisamente, il VOLTERRA ha dimostrato che la ricerca del potenziale in una lamina piana alimentata da elettrodi puntiformi posti nel suo interno si riconduce a un problema di derivata obliqua, ma ha supposto la lamina

(*) Lavoro eseguito per l'INAC.

⁽¹⁾ Diremo funzione regolare quella funzione che il PICONE (*Appunti di Analisi superiore*, cap. II, § 1, n. 6) chiama funzione biregolare, cioè una funzione continua, dotata di derivate prime continue in tutto D , di derivate seconde finite e continue all'interno di D .

⁽²⁾ Il verso positivo degli angoli è, al solito, quello antiorario.

⁽³⁾ V. VOLTERRA, *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico*, « Rend. Lincei, ser. V, vol. 24 (1915), pp. 220-234, 289-303, 378-390, 533-543.

omogenea e il campo magnetico uniforme, sicchè l'angolo di obliquità risulta costante come $f(z)$, e la condizione (1) diventa ovvia conseguenza della stazionarietà della corrente. Ma se la lamina piana, sempre alimentata da elettrodi puntiformi, si suppone non omogenea e il campo magnetico non uniforme, vi è un caso — non considerato dal VOLTERRA e che metteremo in evidenza in questa Nota — in cui la ricerca del potenziale si riduce ad un problema di derivata obliqua con angolo di obliquità variabile. In questo caso vedremo che la condizione del FICHERA è soddisfatta supponendo nulla la somma delle intensità di corrente immesse nella lamina degli elettrodi, come deve essere per la stazionarietà delle correnti stesse. La (1) assume perciò un semplice significato fisico e così pure assume, come vedremo, significato fisico la funzione analitica $f(z)$, che verrà introdotta in modo molto naturale.

2. Consideriamo una lamina piana che occupi il dominio D di cui è accennato nel n.º precedente. Nei punti $P_1 \dots P_s \dots P_n$ interni alla lamina siano posti gli elettrodi puntiformi che immettono nella lamina stessa le correnti positive o negative ⁽¹⁾ $i_1 \dots i_s \dots i_n$. Come si è già osservato, per la stazionarietà delle correnti deve essere:

$$(2) \quad \sum_{s=1}^n i_s = 0.$$

Sulla lamina agisca un campo magnetico normale al piano della lamina stessa e con direzione del vettore k ⁽²⁾. Allora la relazione fra il vettore densità di corrente J (più precisamente J è il vettore densità di corrente moltiplicato per lo spessore della lamina) e il potenziale V del campo elettrico, si può scrivere, per ogni punto P diverso degli elettrodi:

$$(3) \quad J = -\alpha \operatorname{grad} V - \beta \operatorname{grad} V \wedge k,$$

dove α e β ($\alpha > 0$) ⁽¹⁾ sono grandezze dipendenti dal mezzo e dal

⁽¹⁾ Ovviamente una corrente negativa è in realtà una corrente che esce dalla lamina.

⁽²⁾ Se il campo magnetico non è normale al piano della lamina terremo conto solo della sua componente normale al piano (e perciò diretta come k) trascurando alcuni fenomeni dovuti alla componente del campo magnetico lungo la lamina; questa difficoltà si potrebbe, forse, evitare considerando una lamina curva a forma di superficie sviluppabile, e sempre normale al campo magnetico. Trascureremo anche le forze elettromotrici dovute alla non-omogeneità.

⁽¹⁾ Nella memoria di VOLTERRA α è indicato con K , β con $-K\lambda$; queste costanti, a rigore, dovrebbero moltiplicarsi per lo spessore della lamina.

campo magnetico in P , esse sono perciò funzioni del posto, (ossia di x, y) che supporremo definite anche negli elettrodi e differenziabili in tutto D . Alla (3) occorre associare le condizioni di continuità della corrente elettrica:

$$(4) \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (5) \mathbf{J} \times \mathbf{n} = 0,$$

la prima valida in ogni punto interno alla lamina (esclusi gli elettrodi), la seconda sul suo contorno c . Inoltre il flusso di $\mathbf{J}$ intorno a una linea circondante solo un elettrodo deve essere uguale all'intensità di corrente che esce dall'elettrodo stesso. Considerando, come si fa sempre nella teoria delle correnti, i punti $P_1, \dots, P_s, \dots, P_n$ come luoghi di singolarità logaritmica per il potenziale, le condizioni sovraesposte determinano, come risulta in sostanza dalla memoria del VOLTERRA, in modo univoco la V e quindi, per la (3), la distribuzione delle correnti.

3. Sostituiamo la (3) nella (4); otteniamo subito (ΔV è il laplaciano di V)

$$(6) \operatorname{div} \mathbf{J} = -(\alpha \Delta V + \operatorname{grad} \alpha \times \operatorname{grad} V - \operatorname{grad} \beta \wedge \mathbf{k} \times \operatorname{grad} V) = 0.$$

Il potenziale V risulterà armonico se:

$$(7) \operatorname{grad} \alpha = \operatorname{grad} \beta \wedge \mathbf{k}$$

viceversa se V è armonico e vale la (7) la $\mathbf{J}$ risulta solenoidale.

La (7) posta in forma cartesiana ⁽²⁾ esprime la condizione affinché α e β siano rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di una funzione analitica $\alpha + i\beta$ dalla variabile z uguale a $x + iy$.

Sostituendo poi (3) in (5), tenendo conto che $\mathbf{k} \wedge \mathbf{n}$ vale $\mathbf{t}$, vettore unitario tangente a c orientato nel senso antiorario, detto Θ l'argomento della funzione $\alpha + i\beta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \Theta < \frac{\pi}{2}\right)$ e l la direzione definita nel n.º 1 si ha:

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathbf{J} \times \mathbf{n} &= -\left(\alpha \frac{\partial V}{\partial n} + \beta \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\cos \Theta \frac{\partial V}{\partial n} + \sin \Theta \frac{\partial V}{\partial t}\right) = \\ &= -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\partial V}{\partial l} = 0. \end{aligned}$$

(2) Si ha infatti proiettando la (7) sugli assi:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

4. Ciò posto, come si fa sempre nella teoria delle correnti, poniamo:

$$(9) \quad V = - \sum_1^n \frac{i_s \log r_s}{2\pi\alpha_s} + W$$

dove W è una funzione regolare in tutto D , r_s la distanza PP_s , α_s , il valore di α , calcolato in P_s . Poichè V è armonica tale sarà anche W compresi, per la sua regolarità, i punti $P_1 \dots P_s \dots P_n$. Inoltre sul contorno c di D si ha, per la (8):

$$(10) \quad \frac{\partial W}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \sum_1^n \frac{i_s \log r_s}{2\pi\alpha_s}.$$

Poichè coi termini della sommatoria di (9) si soddisfa, come si vedrà fra breve, alle condizioni degli elettrodi, la ricerca del potenziale V si riconduce alla ricerca di W , cioè, come si è affermato, ad un problema di derivata obliqua. È da notare che l'angolo di obliquità è l'argomento di $\alpha + i\beta$ su c . Questa funzione perciò coincide con $j(z)$, che viene così introdotta direttamente e acquista, in tal modo, un semplice significato fisico.

Per verificare le condizioni degli elettrodi introduciamo i vettori $J_0, J_1 \dots J_s \dots J_n$. Il vettore J_0 sarà ottenuto ponendo nella (3) al posto di V , W , il vettore J_s ponendo, al posto di V , $-\frac{i_s \log r_s}{2\pi\alpha_s}$. Si ha subito:

$$(11) \quad J = J_0 + \sum_1^n J_s.$$

Inoltre, poichè le funzioni poste nella (3) in luogo di V sono armoniche il vettore J_0 sarà solenoidale e regolare in tutto D , J_s sarà pure tale ad eccezione del punto P_s . Allora il flusso di J_s lungo una linea che circonda solo P_s si riduce al flusso di J_s ed è indipendente dalla linea considerata che potrà scegliersi, per comodità, un cerchio di centro P_s e di cui si farà tendere allo zero il raggio. Con considerazioni ben note, che qui non ripeteremo, si dimostra che il flusso in discorso vale i_s ; le condizioni agli elettrodi sono perciò verificate. E, ancora con considerazioni ben note, si trova che il flusso di $\sum_1^n J_s$ che circonda tutti gli elettrodi attraverso una linea (in particolare la c) vale la somma delle correnti immesse nella lamina.

5. Calcoliamo ora il flusso di J attraverso c ; tenuto presente la (8) e la (11) troviamo:

$$(12) \quad \int_c J_0 \times n dc = - \sum_1^n \int_c J_s \times n dc.$$

Ma $J_0 \times n$ vale $-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\partial W}{\partial l}$ come si dimostra subito rifacendo gli stessi calcoli che hanno condotto alla (8), sostituendo però W a V . Sostituendo nella (12) ricaviamo, ricordando $|f(z)| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$:

$$(13) \quad \int_c |f(z)| \frac{\partial W}{\partial l} dc = \sum_1^n i_s.$$

Ma per la solenoidalità e regolarità di J_0 il primo membro di (12) uguale al membro di (13) deve essere nullo. Si ottiene così la condizione (1) del FICHERA, che risulta soddisfatta, come si è già detto, in base alle (2), cioè in base alla stazionarietà delle correnti.

Infine, è bene notare che, applicando i metodi del citato articolo del FICHERA, le ipotesi di regolarità su W , e le ipotesi su α e β , potrebbero sostituirsi con altre, meno restrittive.