Bollettino Unione Matematica Italiana

Gaetano Fichera

Sul problema della derivata obliqua e sul problema misto per l'equazione di Laplace.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.4, p. 367–377.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_4_367_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sul problema della derivata obliqua e sul problema misto per l' equazione di Laplace. [1]

Nota di GAETANO FICHERA (Trieste).

Sunto. - *Si determinano condizioni per l' esistenza di una funzione ormonica* u *per la quale sulla frontiera di un dominio è assegnata la derivata* $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ *secondo una direzione variabile. Come caso particolare si studia il problema al contorno misto per l' equazione di Laplace.*

In un mio lavoro di prossima pubblicazione dedicato principalmente ai problemi al contorno misti per le equazioni differenziali della Fisica matematica ho, fra l' altro, conseguito alcuni risultati per l' equazione di LAPLACE in due variabili, che voglio qui esporre separatamente, anche perchè, per qualcuno di essi, il Prof. GRAFFI ha dato un' interpretazione fisica la quale trovasi esposta in una Sua Nota. inserita in questo stesso numero del « Bollettino » (*).

I detti risultati, relativi all' equazione di LAPLACE, sono stati da me conseguiti già da qualche tempo ed essi furono per la prima volta esposti durante una conferenza, che io tenni presso la Facoltà di Scienze dell' Universita di Trieste nel giugno del 1950.

1. Definizioni e posizione dei problemi. — Sia A un insieme aperto, limitato e connesso del piano della variabile complessa $z = x + iy$. La frontiera di A sia costituita dalla curva semplice

(1) Lavoro eseguito per l' I. N. A. C. nell' Istituto Matematico dell' Università di Trieste.

(*) Vedi pag. 378 [Nota della Redazione].

e chiusa Γ. Supporrò che Γ sia dotata di tangente continua e curvatura limitata, quantunque alcuni dei teoremi del seguito continuino a sussistere anche in ipotesi più generali per Γ. Assunto come positivo il verso anti-orario su Γ, sia z un punto variabile su Γ ed $\omega(z)$ una funzione reale definita su Γ e verificante le disuguaglianze $-\pi < \omega(z) \leq \pi$. Detto $\vec{\nu}(z)$ il versore normale a Γ nel punto z e diretto positivamente verso l'interno di A, indichiamo con $\vec{\lambda}(z)$ un secondo versore definito su Γ, e tale che — assunto come verso positivo delle rotazioni quello anti-orario — la misura dell'angolo di cui deve rotare $\vec{\nu}(z)$ per sovrapporsi a $\vec{\lambda}(z)$ sia uguale a $\omega(z)$. Se $\omega(z) = 0$, allora $\vec{\nu}(z) = \vec{\lambda}(z)$ e quando $\omega(z) = -\frac{\pi}{2}$ allora $\vec{\nu}(z)$ coincide con il versore tangente positivo a Γ in z. Convenendo di indicare con $\frac{\partial}{\partial\nu}$ la derivazione secondo il versore $\vec{\nu}$ e con $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ quella secondo $\vec{\lambda}$, considereremo il seguente problema al contorno:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } A, \qquad (2) \quad \frac{\partial u}{\partial\lambda} = g(z) \quad \text{su } \Gamma,$$

essendo $g(z)$ un' assegnata funzione definita su Γ.

Noi indicheremo tale problema al contorno come *problema della derivata obliqua* per l'equazione di LAPLACE in due variabili. Rientrano in esso come casi particolari:

a) *Problema di Dirichlet* per $\omega(z) \equiv -\frac{\pi}{2}$. In tal caso infatti è nota — a meno di una costante additiva — la funzione incognita su Γ.

b) *Problema di Neumann* per $\omega(z) \equiv 0$, nel qual caso $\frac{\partial u}{\partial\lambda} \equiv \frac{\partial u}{\partial\nu}$.

c) *Problema misto* per $\omega(z) \equiv -\frac{\pi}{2}$ lungo una parte Γ_1 di Γ e $\omega(z) \equiv 0$ lungo la rimanente parte Γ_2 di Γ.

Viene nella letteratura indicato come *caso regolare* per il problema della derivata obliqua, quello che si presenta allorchè $\omega(z)$ è una funzione continua su Γ verificante le limitazioni $-\frac{\pi}{2} < \omega(z) < \frac{\pi}{2}$. In esso rientra il caso *b*) (Problema di NEUMANN) ma non *a*) e *c*).

È opportuno per gli ulteriori sviluppi ben precisare il significato di una locuzione. Indicato con Γ' un' arbitrario insieme di punti contenuto in Γ, dicendo che *la funzione* u(z) *è di classe uno in* $A + \Gamma'$ intenderò: 1) la $u(z)$ è definita e continua in $A + \Gamma'$ e possiede derivate parziali prime $u_x(z)$ e $u_y(z)$ continue in A; 2) esistono due funzioni continue in $A + \Gamma'$ le quali in ogni punto di A coincidono rispettivamente con $u_x(z)$ ed $u_y(z)$.

Denoterò con $U_{\Gamma'}$ la classe delle funzioni armoniche in A e di classe uno in $A + \Gamma'$.

2. Teoremi di esistenza e condizioni di compatibilità. — È classicamente ben nota l'esistenza della soluzione nella classe U_Γ per il problema (1) (2) nei casi particolari *a*) e *b*), quando si ammetta che $g(z)$ oltre a verificare su Γ una condizione di Hölder soddisfi alla relazione quantitativa

$$\int_\Gamma g(z) ds = 0.$$

Il *caso regolare*, che per primo studiò l'abate Bertrand, in connessione al problema fisico-matematico delle maree [2], è stato — anche nel caso tridimensionale — trattato dal punto di vista esistenziale dal Giraud [3]. Egli conformemente al metodo classico di Fredholm pel caso $\omega(z) \equiv 0$ — rappresenta la incognita u con un integrale di semplice strato logaritmico dovuto ad una distribuzione di materia su Γ di densità incognita $\mu(z)$:

$$u(\zeta) = \int_\Gamma \mu(z) \log|z - \zeta|\, d_z s. \tag{3}$$

Imponendo la (2) si trova:

$$\mu(\zeta) - \frac{1}{\pi \cos\omega(\zeta)} \overset{*}{\int_\Gamma} \mu(z) \frac{\partial}{\partial\lambda_\zeta} \log|(z - \zeta|\, d_z s = \frac{g(\zeta)}{\pi \cos\omega(\zeta)}. \tag{4}$$

Il nucleo

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{\pi \cos\omega(\zeta)} \frac{\partial}{\partial\lambda_\zeta} \log|z - \zeta|$$

non è sommabile su Γ nel senso ordinario e l'integrale $\overset{*}{\int}$ è un integrale principale di Cauchy, che ha valore finito, se si richiede alla μ di verificare su Γ una condizione di Hölder.

Giraud dimostra che per la (4) sussistono i teoremi fondamentali delle equazioni integrali di Fredholm. Per modo che, consi-

[2] Cfr. Bertrand, *La théorie des marées et les équations intégrales*, Ann. Sci. de l'Ecole Normale sup. t. 40, 1923.

[3] Cfr. Bouligand, Giraud, Delens, *Le probléme de la derivée oblique en théorie du potentiel*, Actualités sci. et ind. Hermann, Paris (1935).

derata l'equazione omogenea trasposta della (4).

$$\int_{\Gamma}^{*} K(\zeta, z)\psi(\zeta)d_{\zeta}s = \psi(z)$$

e dimostrato che essa possiede una ed una sola soluzione hölderiana su Γ e verificante la condizione $\int_{\Gamma} |\psi|^2 ds = 1$, il GIRAUD conclude che la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza, nel caso regolare, della soluzione del problema (1) (2), rappresentata dalla (3) con μ hölderiana su Γ, e quindi u appartenente alla classe U_{Γ}, è che l'assegnata funzione $g(z)$, hölderiana su Γ, verifichi la condizione

$$\int_{\Gamma} g(z)\tau(z)ds = 0, \tag{5}$$

avendo posto:

$$\tau(z) = \frac{\psi(z)}{\cos \omega(z)}.$$

La condizione (5) ottenuta dal GIRAUD presenta — a mio avviso — solo interesse teorico, dato che, non conoscendosi alcun procedimento per il calcolo di $\psi(z)$, e quindi di $\tau(z)$, non si potrà nei casi pratici verificare se la funzione $g(z)$ soddisfa su Γ alla (5).

Riguardo a $\tau(z)$ si potrà solo dire che essa si riduce ad essere identicamente costante se $\omega(z) \equiv 0$ e che, in generale, essa non cambia mai di segno su Γ dato che, nel caso opposto, si potrebbe soddisfare la (5) con una $g(z)$ sempre positiva su Γ, il che porterebbe all'assurdo dell'esistenza di una funzione armonica in A, di classe uno in $A + \Gamma$ e tale che $\frac{\partial u}{\partial \lambda} > 0$ su Γ.

Consideriamo ora il caso particolare *c*) e, per semplicità, supponiamo che Γ_1 e Γ_2 siano due archi nei quali viene decomposta Γ. Precisamente fissati i due punti distinti z_1 e z_2 su Γ sia Γ_1 l'arco positivo di Γ : $\widehat{z_1 z_2}$ e Γ_2 l'arco positivo $\widehat{z_2 z_1}$. Avverto che d'ora in avanti considerando gli archi Γ_1 e Γ_2 si supporrà che essi siano *aperti su* Γ, cioè che nessuno di essi contenga gli estremi z_1 e z_2, per cui $\Gamma - (\Gamma_1 + \Gamma_2) - z_1 + z_2$.

Supposto che $g(z)$ sia uniformemente hölderiana su Γ_1 e su Γ_2, come caso particolare di un teorema d'esistenza per il problema misto, relativo all'equazione differenziale generale del secondo ordine di tipo ellittico autoaggiunta in m variabili [4], si deduce

[4] Cfr. FICHERA, *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi all'equazione ed ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico autoaggiunto*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, (3), 3, pp. 75-100 (1949).

l' esistenza e l' unicità della soluzione del problema (1)(2) nel caso *c*), nella classe delle funzioni che appartengono ad $U_{\Gamma_1+\Gamma_2}$ ed inoltre verificano la condizione

$$\iint_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx dy < +\infty .$$

La soluzione del problema *c*) non è detto che appartenga a U_Γ potendo — come può mostrarsi con esempi — non esser continua, essa stessa o le sue derivate prime, in qualcuno dei punti z_1 e z_2 (5).

È lecito ora chiedersi: qualora si imponga alla soluzione del problema misto di appartenere a U_Γ, dovrà la funzione assegnata $g(z)$ verificare una condizione del tipo della (5), come nel caso particolare *a*) o nel caso regolare?

Si risponderà affermativamente a questa domanda, facendo vedere che i problemi della derivata obliqua, considerati in ipotesi abbastanza generali — nei quali rientrano tutti quelli considerati in questo § — sono tali che per l' esistenza di una soluzione appartenente alla classe U_Γ sono *necessarie* condizioni quale la (5).

Si verrà, nel contempo, a caratterizzare la funzione $\tau(z)$ in un modo — a mio avviso — assai più soddisfacente di quello che, limitatamente al caso regolare, consegue — come si è visto — dalla teoria di GIRAUD, mediante la considerazione dell' autosoluzione $\psi(z)$ di una equazione integrale a nucleo non sommabile.

3. Caratterizzazione di $\tau(z)$. — I. *Sia $\tau(z)$ una funzione non negativa, quasi-continua su Γ e sommabile nel senso di Lebesgue, tale*

(5) Si consideri — ad esempio — il campo A determinato dalle limitazioni: $0 < y < 2$, $-\sqrt{1-(y-1)^2} < x < 1 + \sqrt{1-(y-1)^2}$ e sia $z_2 = 0 + i0$, $z_1 = 1 + i0$. Si ponga $g(z) \equiv 0$ su Γ_2 e $g(z) \equiv \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R} z^{\frac{1}{2}}$ su Γ_2 (con $\mathcal{R} z^{\frac{1}{2}}$ si è indicata la parte reale della determinazione principale della potenza $z^{\frac{1}{2}}$).

Si noti che $g(z)$ è uniformemente hölderiana sia su Γ_1 che su Γ_2. Per provare ciò basta verificarlo sul semicerchio $x = -\sqrt{1-(y-1)^2}$ Si ha infatti su di esso $g \equiv -\frac{1}{4}\left[\sin\frac{s}{2}\left(\cot g\,\frac{s+\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sin\frac{s}{4} + \cos\frac{s}{4}\right)\left(\cos\frac{s}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, $(0 \leq s \leq \pi)$, avendo assunto come origine dell' ascissa curvilinea s il punto $(0, 2)$.

La soluzione, di cui si parla nel testo, del problema misto è, in questo caso, la funzione $\mathcal{R} z^{\frac{1}{2}}$ che non appartiene ad U_Γ dato che le sue derivate prime diventano infinite in z_2.

che per ogni funzione u *appartenente a* U_Γ *si abbia:*

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \lambda} \tau(z) ds = 0. \tag{6}$$

Esiste allora una funzione $f(\zeta)$ *olomorfa in* A *per la quale — fissato quasi ovunque* z *su* Γ *— esiste il limite:*

$$\lim_{z \to \zeta (\text{su } \vec{\nu}\,(z))} f(\zeta) = f(z), \tag{7}$$

riuscendo su Γ

$$| f(z) | = \tau(z), \quad \text{arg. princ. } f(z) = \omega(z).$$

Dalla (6) segue:

$$\int_\Gamma \tau(z) z^{k-1} \frac{\partial z}{\partial \lambda} ds = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

e, dato che

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} ds = \left[\cos\left(\omega(z) + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\omega(z) + \frac{\pi}{2}\right)\right] dz,$$

si deduce che deve essere:

$$\int_{+\Gamma} \tau(z) e^{i\omega(z)} z^h dz = 0 \qquad (h = 0, 1, 2, \dots)$$

e quindi — con facile ragionamento — per ogni ζ' esterno ad A:

$$F(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\Gamma} \frac{\tau(z) e^{i\omega(z)}}{z - \zeta'} dz = 0. \tag{8}$$

Posto per ζ in A

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\Gamma} \frac{\tau(z) e^{i\omega(z)}}{z - \zeta} dz,$$

e detti ζ e ζ' due punti posti sulla normale a Γ in z, simmetrici rispetto al punto z, il primo interno e l' altro esterno ad A, si ha per quasi tutti i punti di Γ:

$$\lim_{\zeta \to z (\text{su } \vec{\nu}\,(z))} f(\zeta) - F(\zeta') = \tau(z) e^{i\omega(z)}.$$

Tale relazione di limite si consegue impiegando consueti ragionamenti della teoria del potenziale di linea o di superficie [6]. Ne seguono, in virtù della (8), tutti i fatti asseriti nell' enunciato.

Osservazione. - Se $\omega(z)$ è una funzione continua e tale è anche $\tau(z)$, la funzione $f(\zeta)$ olomorfa in A è continua in $A + \Gamma$.

[6] Cfr. Fichera, *Sui problemi analitici della elasticità piana*, « Rend Facoltà Sci. Univ. Cagliari », **18**, pp. 1-22 (1948).

Il teorema dimostrato determina, in particolare, la funzione $\tau(z)$ introdotta da GIRAUD nel caso regolare.

Il seguente teorema relativo all'esistenza della funzione $\tau(z)$ può riguardarsi come l'inverso del teorema I.

II. *Esiste una funzione* $\tau(z)$ *quasi-continua e non negativa su* Γ, *ivi sommabile secondo Lebesgue e verificante per ogni* u *di* U_Γ *la* (6), *se esiste una funzione* $f(\zeta)$ *tale che: 1° sia olomorfa in* A; *2° sia quasi ovunque definita su* Γ *e verificante la* (7); *3° si abbia in quasi tutta* Γ : *arg. princ.* $f(z) = \omega(z)$; *4° sia uniformemente sommabile sulle frontiere di una successione di domini regolari che invadano* A (7). *Si ha allora* $\tau(z) = |f(z)|$.

Siano infatti $\alpha(\zeta)$ e $\beta(\zeta)$ la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di $f(\zeta)$ e sia $\{\Gamma_n\}$ la successione delle frontiere dei domini che invadono A e su cui — per ipotesi — la $f(\zeta)$ è uniformemente sommabile. Si ha, detta u una funzione di U_Γ:

$$\int_{\Gamma_n}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\alpha}{\partial\nu}\right)ds=\int_{\Gamma_n}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial\nu}+u\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)ds=\int_{\Gamma_n}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial\nu}-\beta\frac{\partial u}{\partial s}\right)ds=0$$

e dato che

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial\nu}-\beta\frac{\partial u}{\partial s}\right)ds=\int_{\Gamma}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial\nu}+\beta\frac{\partial u}{\partial s}\right),$$

ne viene

$$\int_{\Gamma}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial\nu}-\beta\frac{\partial u}{\partial s}\right)ds=\int_{\Gamma}\left(\tau\cos\omega\frac{\partial u}{\partial\nu}-\tau\operatorname{sen}\omega\frac{\partial u}{\partial s}\right)ds=\int_{\Gamma}\tau\frac{\partial u}{\partial\lambda}ds=0.$$

Faremo adesso delle ipotesi sulla funzione $\omega(z)$, peraltro abbastanza generali, tali che, sussistendo esse, è assicurata l'esistenza della funzione $f(z)$, di cui al teorema precedente, e quindi della $\tau(z)$. In tali ipotesi rientrano quelle relative al caso regolare, epperò si ottiene ancora la dimostrazione dell'esistenza di $\tau(z)$. — relativa al detto caso — indipendentemente dalla teoria di GIRAUD.

(7) Dicendo che i domini della successione $\{D_n\}$ invadono A, intendo che $D_n \subset D_{n+1}$ ed inoltre, assunto comunque z in A esiste un D_n che contiene z. Detta Γ_n la frontiera di D_n, la $f(\zeta)$ è uniformemente sommabile sulle Γ_n se, dato $\varepsilon > 0$, esiste un $\sigma_\varepsilon > 0$ tale che, comunque si consideri un insieme I_n costituito da un numero finito di archi distinti di Γ_n la cui somma delle lunghezze non superi σ_ε, si abbia *qualunque sia* n: $\int_{I_n}|f(\zeta)|\,ds < \varepsilon$. In tale ipotesi per $f(\zeta)$, se $v(\zeta)$ è una qualsiasi funzione continua in $A+\Gamma$, si ha: $\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n} fv\,ds=\int_\Gamma fv\,ds$.

Le ipotesi in questione sono le seguenti:

1°) Eccettuati al più un numero finito di punti $z_1, z_2, \dots, z_p$, $z_{p+1} \equiv z_1$ di Γ, la $\omega(z)$ è continua, e nei punti interni ad ogni arco $\widehat{z_k z_{k+1}} (k = 1, 2, \dots, p)$ coincide con una funzione di s che è assolutamente continua sull'arco $\widehat{z_k z_{k+1}}$ ed ha derivata prima ivi di quadrato sommabile.

2°) Definito il *salto* $S(z_k)$ di $\omega(z)$ in z_k al modo seguente:

$$S(z_k) = \lim_{z \to z_k^+} \omega(z) - \lim_{z \to z_k^-} \omega(z) \qquad (k = 1, 2, \dots, p),$$

sia per ogni k: $S(z_k) < \pi$.

III. *Nelle ipotesi ammesse per* $\omega(z)$, *esiste la funzione* $f(\zeta)$ *del teorema precedente.*

Si consideri su Γ l'equazione integrale di FREDHOLM;

$$q(\zeta) = \pi\varphi(\zeta) - \int_\Gamma \varphi(z) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} d_z s. \tag{9}$$

È noto che se $q(\zeta)$ è una funzione reale, quasi-continua e di quadrato sommabile, su Γ, la quale verifica la condizione $\int_\Gamma q(z) ds = 0$, esiste una soluzione della (9) quasi-continua e di quadrato sommabile su Γ. ([8]).

Sia $\Theta_k(z)$ la funzione la quale esprime la misura dell'angolo che il vettore variabile $\overrightarrow{z_k z}$ forma con $\overrightarrow{\nu}(z_k)$, avendo assunto come verso positivo quello antiorario e imposto $-\pi < \Theta_k(z) \leq \pi$. Si ponga:

$$q(z) = -\frac{\partial}{\partial s}\left[\omega(z) + \sum_{k=1}^{p} \frac{S(z_k)}{\pi} \Theta_k(z)\right]. \tag{10}$$

La $q(z)$ verifica tutte le ipotesi richieste ([9]). Si può allora considerare in A la funzione armonica

$$P(\zeta) = \int_\Gamma \varphi(z) \log |z - \zeta| \, d_z s,$$

([8]) Cfr. FICHERA, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*, « Ann. Mat. pura e appl. », t. 27, s. IV (1948). Le equazioni integrali considerate in questo lavoro sono quelle relative ai problemi armonici tridimensionali. Ma i risultati sussistono — con dimostrazione invariata — anche nel caso piano.

([9]) Si osservi che la funzione $R(z) = \omega(z) + \sum_{k=1}^{p} \frac{S(z_k)}{\pi} \Theta_k(z)$ è continua su Γ e assolutamente continua su ogni arco $\widehat{z_k z_{k+1}}$ e quindi su tutta Γ, per cui $\int_\Gamma \frac{\partial R}{\partial s} ds = 0$.

essendo $\varphi(z)$ la soluzione di (9) con $q(z)$ data da (10). La funzione $P(\zeta)$ è continua in $A+\Gamma$, dato che φ è di quadrato sommabile su Γ, ed inoltre verifica la seguente condizione al contorno su quasi tutta Γ:

$$\lim_{\xi \to z\,(\mathrm{su}\,\overrightarrow{\nu}\,(z))} \frac{\partial P}{\partial \nu} = q(z). \tag{11}$$

Si ha per ζ esterno ad A

$$\int_{\Gamma} \left(P(z) \frac{\partial \log |z-\zeta|}{\partial \nu_z} - q(z) \log |z-\zeta| \right) d_z s = 0.$$

D' altra parte poichè la $R(z) = \omega(z) + \sum\limits_{k=1} \frac{S(z_k)}{\pi} \Theta_k(z)$ è funzione assolutamente continua dell' arco s su tutta Γ, si ha anche:

$$\int_{\Gamma} \left(P(z) \frac{\partial \log |z-\zeta|}{\partial \nu_z} - R(z) \frac{\partial \log |z-\zeta|}{\partial s} \right) d_z s = 0. \tag{12}$$

Ciò implica per ogni ζ esterno ad A:

$$\int_{\Gamma} \left(R(z) \frac{\partial \log |z-\zeta|}{\partial \nu_z} + P(z) \frac{\partial \log |z-\zeta|}{\partial s} \right) d_z s = 0, \tag{13}$$

dato che la funzione a primo membro della (13) è infinitesima all' infinito ed è la coniugata armonica di quella a primo membro della (12).

Da (12) e (13) si deduce con facili calcoli:

$$\int_{+\Gamma} \frac{P(z) + iR(z)}{z-\zeta} dz = 0$$

per ogni ζ esterno ad A. Ne viene che la funzione:

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\Gamma} \frac{P(z) + iR(z)}{z-\zeta} dz$$

olomorfa in A e continua in $A+\Gamma$ coincide su Γ con la funzione $P(z) + iR(z)$. Da ciò segue che la funzione:

$$f(\zeta) = e^{h(\zeta)} \prod_{k=1}^{p} (\zeta - z_k)^{-\frac{S(z_k)}{\pi}}$$

verifica tutte le ipotesi richieste dal teor. II.

Si ha allora:

$$\tau(z) = |f(z)| = e^{P(z)} \prod_{k=1}^{p} |z - z_k|^{-\frac{S(z_k)}{\pi}}.$$

Possiamo quindi concludere col seguente teorema:

IV. *Se* $\omega(z)$ *verifica le ipotesi sopra specificate, condizione necessaria perchè esista una soluzione del problema* (1) (2) *appartenente ad* U_Γ *è che sia verificata la condizione:*

$$\int_\Gamma g(z)e^{P(z)} \prod_{k=1}^{p} |z - z_k|^{-\frac{S(z_k)}{\pi}} ds = 0,$$

essendo P *una funzione armonica, continua in* $A + \Gamma$, *che verifica la condizione al contorno* (11) ([10]).

Problema misto. — Supponiamo, in particolare, che sia $p = 2$ e che su $\Gamma_1 \equiv \widehat{z_1 z_2}$ sia $\omega(z) \equiv -\frac{\pi}{2}$ e su $\Gamma_2 \equiv \widehat{z_2 z_1}$ sia $\omega(z) \equiv 0$. Si ha in tal caso: $S(z_1) = -\frac{\pi}{2}$, $S(z_2) = \frac{\pi}{2}$.

D' altra parte se si assume $\omega(z) \equiv \frac{\pi}{2}$ su Γ_1 e $\omega(z) \equiv 0$ su Γ_2, il problema al contorno corrispondente è sempre quello misto, consistente nell' assegnare la derivata secondo l' arco s su Γ_1 e quella normale su Γ_2. Con tale definizione di $\omega(z)$ si ha $S(z_1) = \frac{\pi}{2}$ e $S(z_2) = -\frac{\pi}{2}$.

Dal teorema IV si deduce allora il seguente relativo al problema misto:

V. *Assegnata su* $\Gamma_1 + z_1 + z_2$ *la funzione continua* $g_1(z)$, *dotata ivi di derivata continua rispetto all' arco* s *e su* $\Gamma_2 + z_1 + z_2$ *la funzione continua* $g_2(z)$, *condizione necessaria perchè esista una funzione* u *di classe uno in* $A + \Gamma$, *verificante le equazioni:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ in } A; \quad u = g_1 \quad \text{su } \Gamma_1; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_2 \quad \text{su } \Gamma_2;$$

è che si abbia:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{dg_1}{ds} e^{P(z)} \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right|^{\frac{1}{2}} ds + \int_{\Gamma_2} g_2 e^{P(z)} \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right|^{\frac{1}{2}} ds = 0.$$

$$-\int_{\Gamma_1} \frac{dg_1}{ds} e^{-P(z)} \left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right|^{\frac{1}{2}} d + \int_{\Gamma_2} g_2 e^{-P(z)} \left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right|^{\frac{1}{2}} ds = 0.$$

([10]) La condizione del teorema è necessaria anche se, soltanto, si vuole che la soluzione del problema abbia le derivate prime limitate. Nelle ipotesi ammesse per ω la condizione non è però, in generale, sufficiente come può mostrarsi con esempi. Cfr. M. G. PLATONE, *Sugli stati di tensione piana in un corpo cilindrico elastico*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », (3), 5, pp. 57-70 (1951).

La P *è una funzione armonica in* A *e verificante la condizione al contorno:*

$$\lim_{\zeta \to z} \frac{\partial P}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} (\Theta_1(z) - \Theta_2(z)).$$

Più in generale, per il problema misto consistente nell'assegnare $\frac{\partial u}{\partial s}$ su n archi distinti di Γ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sui restanti n archi, si deducono dal teor. IV — estendendo in modo ovvio il ragionamento fatto per $n = 1$ — un ben determinato numero k_n, dipendente da n, di condizioni necessarie per l'esistenza della soluzione in U_Γ.

Se A è un dominio circolare di centro l'origine, poichè la funzione $\Theta_1(z) - \Theta_2(z)$ si mantiene costante sui due archi di cerchio Γ_1 e Γ_2, la P è costante in $A + \Gamma$. Si deducono allora le seguenti proprietà integrali per le funzioni armoniche:

VI. *Se la funzione* U *è armonica nel campo* T *e* Γ *è una circonferenza di centro* z_0 *e di raggio* ρ *interna a* T, *presi arbitrariamente due punti* z_1 *e* z_2 *su* Γ, *assunto un sistema di coordinate polari di polo* z_0 *e asse polare* $z_0 z_1$ *e detta* $\bar{\varphi}$ *l'anomalia di* z_2 *nel detto riferimento, si ha:*

$$(14) \qquad \int_0^{\bar{\varphi}} u_\varphi(\rho, \varphi) \left[\frac{1 - \cos \varphi}{1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi)}\right]^{\frac{1}{2}} d\varphi - \int_{\bar{\varphi}}^{2\pi} u_\rho(\rho, \varphi) \left[\frac{1 - \cos \varphi}{1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi)}\right]^{\frac{1}{2}} \rho d\varphi = 0.$$

$$\int_0^{\bar{\varphi}} u_\varphi(\rho, \varphi) \left[\frac{1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi)}{1 - \cos \varphi}\right]^{\frac{1}{2}} d\varphi + \int_{\bar{\varphi}}^{2\pi} u_\rho(\rho, \varphi) \left[\frac{1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi)}{1 - \cos \varphi}\right]^{\frac{1}{2}} \rho d\varphi = 0.$$

Per $\bar{\varphi} = 0$ si ottiene la ben nota proprietà integrale delle funzioni armoniche: $\int_0^{2\pi} u_\rho(\rho, \varphi) d\varphi = 0$.

(11) A. Ghizzetti nel caso del cerchio ha dato la formola risolutiva per il problema misto, considerato in una classe di funzioni che possono anche essere singolari in z_1 e z_2. (*Sopra un particolare problema misto di Dirichlet - Neumann per l'equazione di Laplace etc.*, « Rend. Mat. e sue appl. », (5), 5. pp. 131-168 (1946).

Sarebbe — a mio avviso — interessante constatare se, soddisfatte le (14), la formola di Ghizzetti fornisce una funzione di U_Γ.