
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE PALAMÀ

Artmo-quadrilatero inscritibile.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 7
(1952), n.3, p. 342-345.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_342_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Aritmo-quadrilatero inscritibile.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

Sunto - Si stabilisce un teorema di Aritmo-geometria che inverte un altro di BUQUET e si ritrova in maniera semplice una nota multigrada normale del 3° ordine con quattro parametri indipendenti.

1. A. BUQUET ⁽¹⁾ ha osservato che se $a, d; c, f$ sono i lati opposti di un aritmo-quadrilatero, (ricordiamo che si dice *aritmo-poligono* un poligono che ha i lati e le diagonali razionali, e che un aritmo-poligono che ha anche l'area razionale vien detto *eriano*), inscritibile ed e, b le diagonali, si ha che $X, Y, Z, T; X', Y', Z', T'$ dati da

$$(1) \begin{cases} X, Z = \pm a + b \pm c \mp d + e \mp f; & Y, T = \pm a - b \mp c \mp d - e \pm f \\ X', Z' = \pm a - b \pm c \pm d + e \pm f; & Y', T' = \pm a + b \mp c \pm d - e \mp f, \end{cases}$$

soddisfano all'uguaglianza multigrada

$$(2) \quad X^n + \dots + T^n = X'^n + \dots + T'^n,$$

per $n = 1, 2, 3, 5$, essendo inoltre $\Sigma X = \Sigma X' = 0$.

2. Questo teorema può invertirsi risolvendo il sistema (1) che ha soltanto sei equazioni linearmente indipendenti, rispetto ad $a, b, \dots, f$.

Si ha così il seguente teorema.

⁽¹⁾ Cfr. V. THÉBEALT, *Les Récréations Mathématiques (Parmi les nombres curieux)*, avec des Notes de A. BUQUET. Paris, Gauthier-Villars, (1952), p. 293. Nella Nota di aritmo-geometria di BUQUET inserita nel libro citato, ove è riportata la proposizione del testo, non è detto però se quest'ultima è dello stesso Sig. BUQUET o di altro Autore.

TEOREMA. - Se $X, \dots; X', \dots$ soddisfano a (2), allora

$$(3) \quad \begin{aligned} a, d &= X' + Y' \pm (X + Y); & c, f &= X' + T' \pm (X + T); \\ e, b &= X + Z \pm (X' + Z'), \end{aligned}$$

sono rispettivamente le due coppie di lati opposti e le diagonali di un aritmo-quadrilatero inscrittibile, purchè sono verificate le condizioni di esistenza dei triangoli in cui le diagonali dividono il quadrilatero.

Difatti si verifica subito che con i valori di $a, b, \dots f$ dati dalle (3), sono identicamente soddisfatte le relazioni dei teoremi di TOLMEO e di LEGENDRE.

$$(4) \quad be = ad + cf, \quad b(ac + df) = e(af + cd).$$

Ad es. la

$$(5) \quad -23, -1, 3, 21 \stackrel{3}{=} -21, -9, 13, 17$$

scritta rispettivamente così:

$$21, -17, 9, -13 \stackrel{3}{=} 23, 1, -21, -3,$$

$$21, -17, 9, -13 \stackrel{3}{=} 23, -3, -21, 1,$$

dà luogo alle due soluzioni, a meno di un fattore comune

$$a = 7, \quad d = 5, \quad c = 7, \quad f = 3, \quad e = 8, \quad b = 7;$$

$$a = 6, \quad d = 4, \quad c = 8, \quad f = 4, \quad e = 8, \quad b = 7.$$

La (5) dà con le (3), ad es., quest'altra soluzione delle (4)

$$a = 3, \quad d = 1, \quad c = 27, \quad f = 3, \quad e = 14, \quad b = 6,$$

cui non corrisponde alcun quadrilatero.

3. Il GLODEN (*) partendo da una multigrada normale qualsiasi del 3° ordine scritta sotto la forma

$$(6) \quad X, Y, X, T \stackrel{3}{=} X', Y', Z', T',$$

con

$$T = -(X + Y + Z), \quad T' = -(X' + Y' + Z'),$$

mediante delle trasformazioni successive complessivamente equivalenti alle (3), ottiene le (4), (vi è un irrilevante cambiamento di

(*) Cfr. A. GLODEN, *Théorèmes nouveaux sur les Systèmes multigrades d'ordre n et applications*, III Congrès National des Sc., Bruxelles, 1950, pp. 80-84.

segno fra le nostre e, b e le corrispondenti di GLODEN, difatti le (4) sussistono se si cambia e, b in $-e, -b$, ottiene cioè anch'egli da una multigrada quale la (6) un aritmo-quadrilatero inscrittibile.

4. Il GLODEN aggiunge poi la seguente soluzione con 4 parametri

$$(7) \quad \begin{aligned} a_1 &= (m+n)(m'+n'), & a_2 &= (m-n)p', & a_3 &= (n'-m')p, \\ b_1 &= (m-n)(n'-m'), & b_2 &= (m+n)p', & b_3 &= (m'+n')p, \end{aligned}$$

ove

$$(8) \quad \begin{cases} m = r^2 - s^2, & n = 2rs, & p = r^2 + s^2, \\ m' = r'^2 - s'^2, & n' = 2r's', & p' = r'^2 + s'^2, \end{cases}$$

del sistema

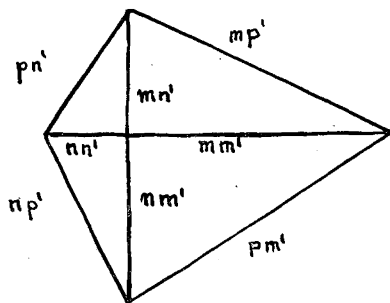
$$(9) \quad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \\ a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3, \end{cases}$$

cui si riduce con le trasformazioni lineari

$$(10) \quad \begin{aligned} a_1 &= Y + Z, & a_2 &= X + Z, & a_3 &= X + Y \\ b_1 &= Y' + Z', & b_2 &= X' + Z', & b_3 &= X' + Y', \end{aligned}$$

una qualsiasi multigrada del tipo della (6).

Ora tale soluzione, a mezzo del teor. riferito al N. 1, può stabilirsi in maniera semplicissima. Difatti se $m, n, p; m', n', p'$, sono i lati interi rispettivamente di due triangoli rettangoli, cioè se valgono in generale le (8) e si costruisce a mezzo dei quattro triangoli



rettangoli di lati (mm', mn', mp') , $(n'm, n'n, n'p)$, $(m'm, m'n, m'p)$, (nm', nn', np') , il quadrilatero della figura risulta eroniano ed inscrittibile ⁽³⁾.

(3) È classico il quadrilatero eroniano del testo. Infatti BRAHMEGUPTA, (nato nel 598), affermò, [nel Cap. 12, Sez. 4, § 38 di *Algebra with Arith. and Mensuration*, dal Sanscrito di BRAHMEGUPTA e BHASCARA, traduzione

Ora la (2) corrispondente, per le (1), al quadrilatero eroniano così generato, dà appunto con le (10), la soluzione (7) di GLODEN della (9).

5. Si noti infine che dal teor. del N. 1 e dal nostro segue che, essendo nota la soluzione completa di una multigrada normale del 3° ordine, possono ottenersi, a mezzo appunto del nostro teor., tutti gli aritmo-quadrilateri inscrittibili.