
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ALDO PIETROSANTI

Sopra una notevole equazione diofantea.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 7
(1952), n.3, p. 341–342.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_341_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sopra una notevole equazione diofantea.

Nota di ALDO PIETROSANTI (a Velletri).

Sunto. - Il contenuto di questa nota è riassunto nel seguente n. 1.

1. Il Sig. A. MOESSNER ha recentemente ⁽¹⁾ reso nota una soluzione parametrica dell'equazione diofantea:

$$(1) \quad x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 = x_6^5.$$

Ci proponiamo di mostrare come si possa pervenire facilmente e in modo del tutto elementare ai risultati del MOESSNER, traendo partito dalla nota identità:

$$(2) \quad \begin{aligned} (x+y-z)^5 + (y+z-x)^5 + (z+x-y)^5 + \\ + 80xyz(x^2 + y^2 + z^2) = (x+y+z)^5 \end{aligned}$$

2. Si osservi, infatti, che il quarto termine del primo membro della (2), ove si ponga:

$$x = a^5, z = hb^5, z = kb^5$$

con a, b, h, k interi positivi, assume l'aspetto:

$$(3) \quad 80hka^5b^{10}[a^{10} + (h^2 + k^2)b^{10}];$$

ed è evidente che, trovando, se possibile, interi, h, k , soddisfacenti alle condizioni

$$(4) \quad 80hk = p^5,$$

$$(5) \quad h^2 + k^2 = q^5,$$

si avrà una soluzione della (1) in funzione dei parametri a, b , poichè, allora, la (3) sarà somma di due quinte potenze intere (e positive).

3. Intanto, il minimo prodotto, hk , soddisfacente alla (4) è, ovviamente:

$$hk = 2 \cdot 5^4;$$

prescindendo dalla simmetria di quest'equazione, tutte e sole le soluzioni (interi e positive) di essa sono:

$$\begin{aligned} h &= 1 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 2 \cdot 5 \quad ; \quad 2 \cdot 5^2 \quad ; \quad 2 \cdot 5^3 \\ k &= 2 \cdot 5^4 \quad ; \quad 5^4 \quad ; \quad 5^3 \quad ; \quad 5^2 \quad ; \quad 5, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ "Bollettino dell'Unione Matematica Italiana", 1951, Serie III, 4, pag. 318.

e poichè la coppia $h = 2 \cdot 5^2$, $k = 5^2$ soddisfa anche alla (5), si ha:
 $x = a^5$, $y = 50b^5$, $z = 25b^5$, e di conseguenza:

$$x_1 = a^5 + 25b^5; \quad x_2 = -a^5 + 75b^5; \quad x_3 = a^5 - 25b^5;$$

$$x_4 = (10a^3b^2)^5; \quad x_5 = (50ab^4)^5; \quad x_6 = a^5 + 75b^5,$$

ch'è, appunto, la soluzione parametrica data dal MOESSNER.