Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Tenca

Osservazioni sulle lunule circolari regolari e sull'Enigma del Viviani.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 328–334.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_328_0>

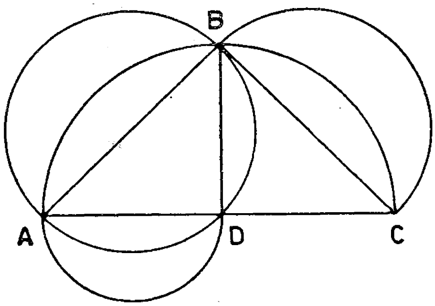
Osservazioni sulle lunule circolari regolari e sull'Enigma del Viviani.

Nota di LUIGI TENCA (a Firenze).

Sunto. - *Si fanno alcune considerazioni sulle lunule circolari allo scopo di illustrare, con notizie storiche, la genesi, l'importanza e il valore dell'Enigma del* VIVIANI.

Considero un triangolo rettangolo isoscele ABC, del quale AC è l'ipotenusa, e costruisco le lunule di IPPOCRATE di Chio [1] che, in questo caso, risultano uguali, e che chiamo *lunule circolari regolari*.

Pongo $AC = 2r$, $AB = 2r_1$ e indico con l_1 l'area di una lunula. Si trova facilmente che



$$l_1 = \frac{r^2}{2} = r_1^2$$

Si ha cioè questa proprietà interessantissima: la lunula regolare di vertici A, B ci dà una porzione del cerchio di diametro AB, limitata da due archi di circonferenze, la cui area si può esprimere con una espressione intera del raggio del cerchio stesso nel modo più semplice senza la presenza di π.

Ripetendo la costruzione già fatta partendo dal triangolo ABC per costruire la lunula regolare l_1, considerando invece il triangolo rettangolo isoscele ABD, essendo D il punto di mezzo di AC, rotando poi la nuova lunula regolare l_2 avente i vertici in A, D di 180°, la l_2 nella nuova posizione ci dà evidentemente una porzione del cerchio di diametro AB, limitata da due archi di cir-

(1) 1] G. LORIA, *Storia delle matematiche*, ed. U. Hoepli, Milano, 1950, pg. 3;

2] Scrive V. VIVIANI, a c. 36, vol. 171, *Discepoli di Galileo*, Bibl. Naz. di Firenze: « Fra i problemi più agitati in Geometria par che ne « tenga il primato quello... de' curvilinei, fra questi, in primo luogo, quello « della quadratura del cerchio... E questo forse diede occasione ad IPPO- « CRATE di Chio di avvertire che la sua lunula fosse eguale a quel trian- « golo rettangolo equicateto... ».

conferenze, la cui area è uguale a $\frac{r_1^2}{2}$. Ripetendo e ripetendo la stessa operazione, si ottengono successivamente porzioni del cerchio di diametro AB, limitate ciascuna da due archi di circonferenze, le cui aree sono date da $\frac{r_1^2}{4}$, $\frac{r_1^2}{8}$, ... La maggiore lunula che può essere contenuta nel cerchio è l_r: ogni lunula è determinata dal segmento che ne unisce i vertici.

Dopo l'assidua e attenta lettura dei manoscritti del VIVIANI (2) che sto facendo per alcune mie particolari ricerche che pubblico nei *Rendiconti dell'Istituto Lombardo*, penso che la considerazione di queste lunule regolari e dell'accennata proprietà gli abbiano suggerito l'idea di costruire porzioni della superficie sferica la cui area sia esprimibile con una espressione intera e in forma semplice del raggio della sfera stessa, senza la presenza di π e di radicali.

E a questo problema pensò fin da giovanetto, come lui stesso racconta (3); poi, distratto dalle sue molte occupazioni che gli riuscivano ancor più gravose per le sue non buone condizioni di salute, non se ne occupò per molto tempo; solo nel 1692, per desiderio del granduca Cosimo III, richiamò l'attenzione dei matematici del suo tempo su questo problema col suo celebre *Enigma* (4), a cui seguì, nello stesso anno, la soluzione col suo lavoro: *Formazione e misura di tutti i cieli ....*

Il problema proposto dal VIVIANI suscitò vivo interesse e una gara di tentativi non tutti fortunati: si può dedurre dal citato suo carteggio, del quale, per ciò che riguarda l'*Enigma,* pubblicherò nei *Rendiconti dell'Istituto Lombardo* un estratto interessante.

Il VIVIANI ne dà la soluzione con la sua *vela fiorentina*, il suo *cielo mirabile*, la sua volta ottenuta da una superficie semisferica, facendo quattro finestre eguali; egli la ottiene in modo pratico elegante, senza darne la dimostrazione.

(2) Bibl. Naz. di Firenze. *Carteggio del* VIVIANI.

(3) v. la prefazione all'opera del VIVIANI: *Formazione e misura di tutti i cieli ....* Firenze, P. Matini, 1692.

(4) Copia dell'*Enigma* venne inviata a nome del granduca Cosimo III a tutti i matematici più conosciuti d'Europa. Lo troviamo riportato, ad es., anche in: *Acta Eruditorum*, 1692, pg. 274; *Philosophical Transactions*, 1692, pg. 587.

Fra i migliori matematici stranieri che se ne occuparono ricordo: G. LEIBNIZ, G. WALLIS, IAC. BERNOULLI, D. GREGORY, G. DE L'HÔPITAL.

In una sfera di legno fa col trapano due fori cilindrici circolari retti eguali paralleli e tangenti, la cui generatrice comune passa per il centro della sfera, ciascuno col diametro eguale al raggio della sfera; sega poi il solido ottenuto col piano determinato dai due assi dei cilindri. Su ciascuna delle due parti ottenute, la porzione di superficie sferica che in parte le limita ci dà la *vela fiorentina*.

Come è ben noto, l'area di detta *vela* è eguale a $4R^2$, essendo R il raggio della sfera. Trovata una porzione, se ne possono trovare quante si vogliono, la cui area si esprime in forma intera col raggio.

Si illudeva il VIVIANI, consenziente il LEIBNIZ, come risulta dai loro manoscritti, di essere stato il primo a trovare una porzione della superficie sferica la cui area si potesse esprimere in modo semplice col raggio senza la presenza di radicali e di π (5). Il LEIBNIZ pensava di essere il secondo in detta ricerca con la soluzione da lui data dell'*Enigma*.

Ma la convinzione del VIVIANI, quantunque suffragata dalla opinione del LEIBNIZ, non risponde a verità. Basta pensare alla spirale di PAPPO (6,1) che si svolge su una semisuperficie sferica partendo dal *polo* per raggiungere la circonferenza *base* dopo aver compiuto un intero giro attorno all'asse della semisfera: essa divide, coll'arco di circolo massimo che ne unisce gli estremi, detta semisuperficie sferica in due parti e per una di esse l'area è proprio eguale al quadrato del diametro della sfera come per la *vela fiorentina*, pur avendo forma diversa (6,2), (6,3). Lo stesso risultato si ottiene per la somma delle quattro finestre della *vela del* LEIBNIZ.

Se si considerano assieme le quattro lunule l_1 costruite attorno

(5) Si legge nella *Vita degli Arcadi illustri*, Roma, A. de' Rossi, 1708, parte I, pg. 131, nella *Vita del Viviani* « ... per cui fugli improntata la medaglia... il rovescio della quale è una sfera traforata con questa iscrizione: Qui primus et Sphoericas superficies nil recti habentes notis rectangulis ostendit oequas »

(6): 1] Se si considera una semisfera e un quadrante di cerchio che sia la metà della sezione della semisfera con un piano passante per il suo asse e si fa ruotare il quadrante attorno a detto asse con moto uniforme, mentre un suo punto partendo dal polo percorre il suo arco di circonferenza pur con moto uniforme e la prima velocità è quadrupla della seconda, si ha che il punto descrive sulla superficie semisferica un'elica che si chiama *Spirale di Pappo*. Per estensione della definizione v. G. LORIA, op. cit., pag. 75.

2] v. G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, ed. U. Hoepli, Milano, 1914, pgg. 673-4.

3] v. G. M. ORTES, *La vita del Padre D. Guido Grandi*, tip. G. Pasquali, Venezia, 1744. pg. 15.

esternamente al cerchio di diametro AC, aventi i vertici di un quadrato iscritto in detto cerchio, si ha che $4l_1 = \frac{d^2}{2}$, essendo d il diametro del cerchio, relazione che ricorda, a meno del fattore $\frac{1}{2}$, l'area della *vela fiorentina*. Ed appunto partendo da una figura come questa il WALLIS studia l'*Enigma* del VIVIANI (7).

Tornando alle nostre lunule regolari si vede che la somma di due o più di esse eguali o no si può esprimere con una lunula regolare; così la differenza di due lunule regolari diseguali togliendo dalla maggiore la minore, il prodotto di una lunula per un numero positivo appartenente al campo di razionalità assoluto con l'aggiunta dell'operazione aritmetica $\sqrt{\ }$ sui numeri positivi (per restare nel campo della riga e del compasso) e in generale una espressione formata da termini di questo tipo riuniti coi segni $+$ o $-$ con la condizione che le sottrazioni siano sempre possibili, si possono esprimere con una lunula regolare (non considerando lunule negative).

Inoltre, ad esempio, le serie di lunule regolari

$$\begin{gathered} l_1 + l_2 + l_3 + \dots \\ l_1 - l_2 + l_3 - \dots \end{gathered}$$

hanno per somme lunule regolari; per la prima la lunula regolare somma ha gli archi di raggi $\sqrt{2}r_1$, $2r_1$; per la seconda di raggi $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r_1$, $\frac{2}{\sqrt{3}}r_1$.

Sapendo che

$$\pi r_1^2 = 4r_1^2 - \frac{4}{3}r_1^2 + \frac{4}{5}r_1^2 - \dots$$

si può affermare che la quadratura del cerchio si ottiene da una serie di lunule regolari.

Di queste lunule si potrebbero mostrare molte proprietà e si possono anche costruire poligoni, contenuti nel cerchio dato, a lati circolari, la cui area si può esprimere con espressione intera e semplice del raggio del cerchio, senza la presenza di π. E, nello stesso modo, si possono esprimere aree di particolari porzioni limitate anche da speciali curve.

Ma concludo con la questione principale.

Poichè il problema per il cerchio si riduce a trovare porzioni di esso limitate da *soli* archi di circonferenze la cui area sia espri-

(7) v. *Philosophical Transactions*, 1692, pgg. 587-592.

mibile in forma intera e in modo semplice col raggio del cerchio stesso nel modo detto, non mancarono tentativi infruttuosi di far ciò anche sulla sfera, con *soli* archi di circonferenze.

Come il VIVIANI ebbe l'idea di ricorrere a quartiche gobbe di prima specie? Mistero. Egli racconta in una sua lettera di aver trovato una via particolare per giungere alla sua risoluzione, ma non la fece mai conoscere. Peccato!

Penso anche, incidentalmente, che avesse cose importanti da dire, come del resto asserivano molti suoi contemporanei, sul *mistero* di π, attorno a cui tanto si affaticarono anche i matematici del suo tempo, ma su ciò nulla finora ho trovato.

Alcuni, molto grossolanamente, vedono nel problema del VIVIANI solo la ricerca dell'area di una porzione della superficie sferica, senza badare all'espressione particolare di quest'area, senza pensare che *tollerando* la presenza di π, data la formola trovata da ARCHIMEDE che dà l'area della superficie stessa, si possono trovare subito quante si vogliono porzioni di cui si può calcolare l'area. Altri affermano che il risultato del VIVIANI ha grande importanza e costituisce un altro merito del *Nostro,* perchè, dicono, è il *solo* caso in cui, applicando il calcolo infinitesimale col metodo di LEIBNIZ, con le regole che conosciamo, si giunge a *quadrare* nel modo detto una porzione di superficie sferica non limitata, o non totalmente limitata da archi di circonferenze: sbagliano con quel *solo*, non sanno, ad esempio, che per quadrare una porzione di superficie sferica da lui considerata, che è diversa da quella del VIVIANI, il LEIBNIZ applicò proprio il nuovo calcolo infinitesimale col suo metodo. Vari fanno merito al VIVIANI di aver trovata una porzione della semisuperficie sferica non limitata da archi di circonferenze, *cubabile* nel modo detto rispetto alla base della semisfera, usando il calcolo infinitesimale, col metodo del LEIBNIZ, con le regole comuni che conosciamo; lo chiamano, questo, erroneamente il *problema del Viviani* quando considerano con questa porzione la sua simmetrica ortogonalmente rispetto alla base della semisfera. Esso, indipendentemente dal metodo di risoluzione, sarebbe un terzo problema a seguito dei primi due accennati: Trovare una porzione della sfera limitata da superficie curve il cui volume sia esprimibile con espressione intera del raggio e in forma semplice, senza la presenza di π.

Il problema può avere varie soluzioni, ed una si deduce dal modo con cui il VIVIANI risolve il *suo* problema.

Il VIVIANI, che poco o punto conosceva il nuovo calcolo, non poteva al certo avere queste concezioni; si tratta di verità alle quali egli non pensava e di cui nessun accenno si trova nei suoi scritti.

Ricordiamo che il VIVIANI, figura nobilissima di studioso, *nacque molti secoli dopo la sua epoca;* è *effettivamente* un geometra del periodo aureo della cultura greca, a questa rimase sempre fedele: la *sentì* in una forma che ha del miracoloso. A lui molto dobbiamo, ma bisogna capirlo com'è, ammirarlo com'è, non pretendere da lui ciò che non poteva, che non *doveva* dare, non attribuirgli idee che non poteva avere; accostarsi a lui, attraverso i suoi manoscritti, alle volte arruffati, con venerazione, e amarlo, mi si perdoni se esco dall'argomento, amarlo anche per la squisita bontà che traspare da ogni sua parola.

Certi giudizi sul VIVIANI sono impropri, inesatti. Non era *sdegnoso* [8] (parola grave, un non senso, per l'anima candida, mite del VIVIANI) dei nuovi indirizzi, non li *sentiva:* certo è questa una imperfezione grave. Per spiegarmi con un esempio volgare, per meglio esser compreso, accadeva nella sua mente ciò che avviene per quegli occhi che non riescono a percepire alcuni colori. Fenomeno strano!

Eppure mi pare ancor più benemerito con questa imperfezione.

Non è che avesse disprezzo della nuova scienza, anzi l'ammirava nei risultati a cui giungeva, come quando, ad esempio, considerava la risposta del LEIBNIZ al suo *Enigma:* « ... fu veramente « risoluto da quel mostruoso ingegno del sig. Leibnizio... ma il me- « todo tenuto da esso è così astruso e tanto diverso dal mio si come « la maniera di dimostrarlo... ». (v. lettera a T. Ceva, senza data, in difesa del LEIBNIZ per appunti a lui fatti, certo del 1694, in vol. 143, c. 206, Carteggio del VIVIANI, Bibl. Naz. di Firenze).

Quando lanciò la sua sfida coll'*Enigma,* intendeva solo provare che lui sapeva risolvere problemi, allora di alta geometria, che forse altri, pur col mezzo potente della nuova scienza, non sapevano affrontare con la semplicità ed eleganza con le quali lui li trattava, o non sapevano affatto risolverli: come il cieco che alle volte dice con compiacenza di saper risolvere questioni che il veggente non sa trattare, o non sa trattare bene come lui. Lo dice con orgoglio, ma nel suo orgoglio non c'è disprezzo per la luce che non percepisce.

Non capiva il TORRICELLI nelle sue nuove concezioni: è vero. Ed è tanto più strana questa incomprensione, perchè GUIDO GRANDI, che effettivamente cominciò a studiare geometria a Firenze, se non sotto la sua guida (purtroppo non ebbe veri maestri), certo sotto l'influenza della luce spirituale che emanava dalla sua persona che aveva la fortuna di avvicinare nei cenacoli di ANTONIO MAGLIABECHI, era fervente ammiratore del TORRICELLI e ne capiva

[8] *Enciclopedia Italiana*, ed. Treccani, Milano, 1932-40, vol. 35°, pg. 529.

tutta la potenza intellettuale. Lo deduco specialmente da una lettera che il GRANDI scrisse a PIETRO CANNETI, da Pisa, il 19 dicembre 1715 (Biblioteca Classense, Ravenna): è tutta un'esaltazione dell'opera del TORRICELLI, confrontata con quella dei più illustri ultramontani.