Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alessandro Ossicini

Funzione generatrice dei prodotti di due polinomi ultrasferici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 315–320.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_315_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Funzione generatrice
dei prodotti di due polinomi ultrasferici.

Nota di ALESSANDRO OSSICINI a (Roma).

Sunto - *Il lavoro è riassunto nell'introduzione.*

a) Ci proponiamo di determinare la funzione generatrice dei prodotti di due polinomi ultrasferici

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m 2^{n-2m}\Gamma(\lambda + n - m)x^{n-2m}}{(n-2m)!\, m!\, \Gamma(\lambda)},$$

ove Γ è la funzione Gamma euleriana di seconda specie [1].

Giungeremo alla funzione generatrice applicando la relazione

[1] Cfr. G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, (Zanichelli, Bologna 1949) p. 274.

integrale:

$$(1)\qquad \int_0^\infty e^{-az}J_\nu(bz)J_\nu(cz)dz = \frac{1}{\pi\sqrt{bc}}\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}\right), \quad (^2)$$

ove J_ν e $Q_{\nu-\frac{1}{2}}$ rappresentano, rispettivamente, la funzione di BESSEL di prima specie e la funzione di LEGENDRE di seconda specie.

b) Dallo sviluppo sui polinomi ultrasferici

$$(2)\qquad e^{zx}J_{\lambda-\frac{1}{2}}(z\sqrt{1-x^2}) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(2\sqrt{1-x^2})^{\lambda-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{\lambda+n-\frac{1}{2}}}{\Gamma(2\lambda+n)}P_n^{(\lambda)}(x)$$

abbiamo

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-z(k-x)}J_{\lambda-\frac{1}{2}}(z\sqrt{1-x^2})\,J_{\lambda-\frac{1}{2}}(zu)dz = \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(2\sqrt{1-x^2})^{\lambda-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_{n(x)}^{(\lambda)}}{\Gamma(2\lambda+n)}\int_0^\infty z^{\lambda+n-\frac{1}{2}}e^{-kz}J_{\lambda-\frac{1}{2}}(zu)dz.\end{aligned}$$

L'integrale a primo membro della (3) è dato per la (1) da

$$(4)\qquad \begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-z(k-x)}J_{\lambda-\frac{1}{2}}(z\sqrt{1-x^2})J_{\lambda-\frac{1}{2}}(zu)dz = \\ &= \frac{1}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\sqrt{u\sqrt{1-x^2}}}\,Q_{\lambda-1}\left(\frac{k^2-2kx+1+u^2}{2u\sqrt{1-x^2}}\right).\end{aligned}$$

Per l'integrale a secondo membro (integrale di HANKEL) (³) si ha

$$(5)\qquad \begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-zk}z^{\lambda+n-\frac{1}{2}}J_{\lambda-\frac{1}{2}}(zu)dz = \\ &= \frac{u^{\lambda-\frac{1}{2}}\Gamma(2\lambda+n)}{2^{\lambda-\frac{1}{2}}k^{2\lambda+n}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{u^2}{k^2}\right)^{-\lambda-n}F\left(-\frac{n}{2},-\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\lambda+\frac{1}{2};-\frac{u^2}{k^2}\right),\end{aligned}$$

ove F (⁴) è la funzione ipergeometrica di GAUSS.

(²) Cfr. G. N. WATSON, *A treatise on the theory of* BESSEL *functions*, (Cambridge 1948), p. 149.

(³) Cfr. G. N. WATSON, op. cit. (2) p. 385.

(⁴) Cfr. G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Volume II, (Padova 1949), pp. 58-71.

Tenendo conto del fatto che

$$F\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, +\frac{1}{2}, \lambda+\frac{1}{2}; -\frac{u^2}{k^2}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{u^2}{k^2}\right)^{\lambda+n} F\left(\lambda+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}, \lambda+\frac{n}{2}, \lambda+\frac{1}{2}; -\frac{u^2}{k^2}\right), \text{ (5)}$$

$$F\left(\lambda+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}, \lambda+\frac{n}{2}, \lambda+\frac{1}{2}; -\frac{u^2}{k^2}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{u^2}{k^2}\right)^{-\lambda-\frac{n}{2}} F\left(2\lambda+n, -n, \lambda+\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{k^2+u^2}-k}{2\sqrt{k^2+u^2}}\right), \text{ (6)}$$

la (5) può porsi sotto la forma

$$\text{(6)} \qquad \int_0^\infty e^{-zk} z^{\lambda+n-\frac{1}{2}} J_{\lambda-\frac{1}{2}}(zu)dz =$$

$$\frac{u^{\lambda-\frac{1}{2}}}{2^{\lambda-\frac{1}{2}} k^{2\lambda+n}} \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} F\left(2\lambda+n, -n, \lambda+\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{k^2+u^2}-k}{2\sqrt{k^2+u^2}}\right)\left(1+\frac{u^2}{k^2}\right)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$$

Utilizzando i polinomi ultrasferici

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!\,\Gamma(2\lambda)} F\left(2\lambda+n, -n, \lambda+\frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$$

la (6) diviene:

$$\int_0^\infty e^{-zk} z^{\lambda+n-\frac{1}{2}} J_{\lambda-\frac{1}{2}}(zu)dz =$$

$$\text{(7)} \qquad = \frac{u^{\lambda-\frac{1}{2}}}{2^{\lambda-\frac{1}{2}} k^{2\lambda+n}} \frac{n!\,\Gamma(2\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \left(1+\frac{u^2}{k^2}\right)^{-\lambda-\frac{n}{2}} P_n^{(\lambda)}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+u^2}}\right).$$

A causa delle (4), (7) dalla (3) si ha quindi

$$\frac{1}{(u\sqrt{1-x^2})^\lambda} Q_{\lambda-1}\left(\frac{k^2-2kx+1+u^2}{2u\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$\text{(8)} \qquad = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(2\lambda+n)} \left(\frac{1}{k^2+u^2}\right)^{\lambda+\frac{n}{2}} P_n^{(\lambda)}(x) P_n^{(\lambda)}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+u^2}}\right).$$

(5) Cfr. G. SANSONE, op. cit. (4) p. 61.

(6) Cfr. L. TOSCANO, *Funzione generatrice dei prodotti di polinomi di* LAGUERRE *con gli ultrasferici*, « Boll. dell'U. M. I. », serie III, anno V n. 2, giugno 1950, p. 145.

Posto

$$y = \frac{k}{\sqrt{k^2 + u^2}} \qquad k = \frac{y}{z}$$

otteniamo ($|y| \leq 1$, $|z| < 1$)

$$(9) \quad \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})^\lambda} Q_{\lambda-1}\left(\frac{1+z^2-2yxz}{2z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,!}{\Gamma(2\lambda+n)} z^n P_n^{(\lambda)}(x) P_u^{(\lambda)}(y).$$

Lo sviluppo (9) se si utilizza la formula di duplicazione del LEGENDRE

$$(10) \qquad 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z) \text{ (}^7\text{)}$$

diviene

$$(11) \quad \frac{1}{[\Gamma(\lambda)]2^{2\lambda-1}} \frac{1}{(z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})^\lambda} Q_{\lambda-1}\left(\frac{1+z^2-2yxz}{2z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,!}{\Gamma(2\lambda+n)} z^n P_n^{(\lambda)}(x) P_n^{(\lambda)}(y).$$

c) Lo sviluppo (11) per $y = 1$ si riduce alla funzione generatrice dei polinomi ultrasferici.

Infatti per $y = 1$

$$P_n^{(\lambda)}(1) = \frac{\Gamma(2\lambda + n)}{n\,!\ \Gamma(2\lambda)},$$

$$\lim_{y \to 1} \frac{Q_{\lambda-1}\left(\frac{1+z^2-2yxy}{2z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\right)}{(2z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})^\lambda} = \frac{[\Gamma(\lambda)]^2 2^{\lambda-1}}{\Gamma(2\lambda)(1+z^2-2xz)^\lambda} \qquad (^8)$$

quindi ($|z| < 1$)

$$\frac{1}{(1-z^2-2xz)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n^{(\lambda)}(x).$$

d) Facciamo ora una seconda applicazione della (1).

Dallo sviluppo ([9])

$$J_\lambda(bz)J_\lambda(cz) =$$

$$(12) \quad = \frac{(bc)^\lambda z^{2\lambda}}{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^{2n} z^{2n}}{2^{2n} n\,!\ \Gamma(\lambda+n+1)} F\left(-n, -\lambda-n, \lambda+1; \frac{b^2}{c^2}\right)$$

([7]) Cfr. G. SANSONE, op. cit. (4) volume I (Padova 1950), p. 186.

([8]) Cfr. E. W. HOBSON, *The theory of spherical, and ellipsoidal harmonics*, (Cambridge, 1951), p. 195.

([9]) Cfr. G. N. WATSON, op. cit. (2) p. 148.

se teniamo conto della (1) e della

$$\int_0^\infty z^{2n+2\lambda} e^{-az} dz = \frac{\Gamma(2\lambda + 2n + 1)}{a^{2\lambda+2n+1}},$$

abbiamo moltiplicando per e^{-az} ed integrando tra 0 ed ∞:

$$(13)\quad \frac{1}{\pi(bc)^{\lambda+\frac{1}{2}}} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^{2n}\Gamma(2\lambda+2n+1)}{2^{2n} n!\,\Gamma(\lambda+n+1) a^{2\lambda+n+1}} F\left(-n, -\lambda-n, \lambda+1, \frac{b^2}{c^2}\right)$$

che per la (10) diviene anche

$$(14)\quad \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(bc)^{\lambda+\frac{1}{2}}} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^{2n}\Gamma\left(\lambda+n+\frac{1}{2}\right)}{n!\; a^{2\lambda+2n+1}} F\left(-n, -\lambda-n, \lambda+1; \frac{b^2}{c^2}\right).$$

Posto

$$a = 1, \quad x = \frac{c^2 - 2b^2}{c^2}, \quad xz = 2b^2 - c^2,$$

si deduce $\left(|x| \leq 1, |z| < \frac{1}{4}\right)$

$$(15)\quad \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(z\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{2+zx-3z}{4z\sqrt{\frac{1-x}{2}}}\right) =$$
$$= \sum_{0=u}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Gamma\left(\lambda+n+\frac{1}{2}\right) F\left(-n, -\lambda-n, \lambda+1; \frac{1-x}{2}\right).$$

Introducendo i polinomi di Jacobi

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\;\Gamma(\alpha+1)} F\left(\alpha+\beta+n+1, -n, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right)$$

lo sviluppo diviene:

$$(16)\quad \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(z\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{2+zx-3z}{4z\sqrt{\frac{1-x}{2}}}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n\Gamma\left(\lambda+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+n+1)} P_n^{(\lambda, -2\lambda-2n-1)}(x)$$

ed anche

$$\frac{1}{\left(z\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{2+zx-3z}{4z\sqrt{\frac{1-x}{2}}}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} z^n B\left(\lambda+n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) P_n^{(\lambda,\,-2\lambda-2n-1)}(x),$$

ove B è la Beta euleriana di prima specie. ([10])

Se in questo sviluppo si pone $x=1$ poichè:

$$P_n^{(\lambda,\,-2\lambda-2n-1)}(1)=\frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{\Gamma(\lambda+1)n!},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(z\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}} Q^{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{2+zx-3z}{4z\sqrt{\frac{1-x}{2}}}\right)=B\left(\lambda+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)(1-z)^{-\lambda-\frac{1}{2}},$$

si ha ($|z|<1$)

$$\frac{1}{(1-z)^{\lambda+\frac{1}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\lambda+n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} z^n$$

cioè lo sviluppo in serie binomiale della $(1-z)^{-\lambda-\frac{1}{2}}$.

([10]) Cfr. G. Sansone, op. cit. (1) p. 279.