BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GUIDO VAONA

Classificazione proiettiva delle varietà quasi-asintotiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 7
(1952), n.3, p. 292–298.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_292_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_292_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Classificazione proiettiva delle varietà quasi-asintotiche.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna).

Sunto - Si indica una classificazione proiettiva delle varietà V_k ($k > 1$) quasi-asintotiche $\sigma_{r,s}$ di una V_m ($m > k$) e se ne fanno alcune applicazioni.

1. Ricordo che una V_k subordinata di una V_m ($k < m$) dicesi quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ ($0 < r < s$) della V_m quando l' $S(r)$ -osculatore alla V_m in un punto generico della V_k e lo $S(s)$ -osculatore alla V_k

(¹⁵) Tutto ciò, e quanto segue, per cose ben note dalla teoria dei sistemi ai differenziali totali.

nello stesso punto hanno uno spazio congiungente di dimensione minore del massimo corrispondente ai valori di m , k , r , s .

Quando si passa dallo studio delle curve quasi-asintotiche a quello delle varietà di dimensione > 1 , si presentano molti fatti nuovi ed interessanti (¹). Una prima circostanza, che non ha l'analogo nel caso delle curve, è stata rilevata dal VILLA (²) nelle prime ricerche da Lui fatte sull'argomento; il VILLA ha osservato che è possibile classificare le $V_k (k > 1)$ quasi-asintotiche $\sigma_{r,s}$ in tipi proiettivamente distinti in base ad un carattere proiettivo, che Egli chiama la *specie*. La specie è un carattere aritmetico che rappresenta la differenza fra la massima dimensione che in generale compete allo spazio congiungente $P^r S(r)$ e $P^s S(s)$ osculatori di cui alla definizione e la dimensione che tale spazio effettivamente possiede. Se essa si indica con t , si ha $1 \leq t \leq \binom{k+s-1}{s}$.

Talune questioni, delle quali mi sto occupando, mi hanno indotto a ricercare nuovi caratteri proiettivi delle V_k quasi-asintotiche $\sigma_{r,s}$ della stessa specie t , che permettano una più approfondita classificazione proiettiva. Ciò sarà l'oggetto di questa breve Nota.

Ad ogni V_k quasi-asintotica $\sigma_{r,s}^t$ si può associare un sistema lineare di ipersuperficie algebriche di un S_{k-1} proiettivo, di ordine s e dimensione $t-1$ (*sistema lineare associato alla $\sigma_{r,s}^t$*). Le $V_k \sigma_{r,s}^t$ si possono classificare in tipi proiettivamente distinti in base alle proprietà proiettive dei relativi sistemi lineari associati, poiché queste proprietà si riflettono in proprietà proiettive delle $\sigma_{r,s}^t$ corrispondenti.

Darò altrove varie applicazioni di questa nozione, mi limiterò

(¹) La nozione di curva è più in generale di varietà quasi-asintotica è stata posta dal BOMPIANI (1912). La teoria delle curve quasi-asintotiche è stata sviluppata soprattutto ad opera del BOMPIANI stesso e del VILLA. Per la vasta bibliografia sull'argomento si vedano i lavori: E. BOMPIANI, *Geometria proiettiva di un'equazione a derivate parziali, lineare omogenea, Note I e II*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (6), 28, pp. 281-301 (1938); M. VILLA, *Nuove ricerche nella teoria delle curve quasi-asintotiche*, « Annali di Mat. », (4), 18, pp. 275-308 (1939). Sulla teoria delle $V_k (k > 1)$ quasi-asintotiche ricordo due lavori di L. MURACCHINI, *Ricerche sulle varietà quasi-asintotiche*. I. *Quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$* . II. *Quasi-asintotiche $\sigma_{r,s}$ di specie massima*, questo Bollettino, (3), 6, pp. 198-205 e 299-304 (1951). Al 1° di questi lavori rimandiamo per la bibliografia sulle varietà quasi-asintotiche.

(²) Si veda: M. VILLA, *Sulle superficie quasi-asintotiche della V_4^6 di S_8 che rappresenta le coppie di punti di due piani*, « Rend. Acc. d'Italia », (7), 1, pp. 228-237 (1940).

qui ad indicare, a mo' d' esempio, alcune applicazioni relative al caso delle superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$ delle varie specie.

2. Consideriamo la V_m descritta dal punto

$$(1) \quad x = x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m).$$

Una V_k della V_m ($k < m$) è fissata quando siano date le funzioni

$$(2) \quad \tau_i = \tau_i(t_1, t_2, \dots, t_k) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Indichiamo con

$$(3) \quad \bar{x} = \bar{x}(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

il punto che descrive la V_k e poniamo al solito $x^i = \frac{\partial x}{\partial \tau_i}$, $x^{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_i \partial \tau_j}$, ..., $\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t_i}$, ...

Affinchè la V_k (3) sia quasi-asintotica $\sigma_{r,s}^t$ per la V_m (1), occorre e basta che, per una k -pla generica di valori delle $t_1, t_2, \dots, t_k$, la matrice

$$(4) \quad \begin{vmatrix} S(r) \\ A(r+1) \\ \dots \\ A(s-1) \\ A(s) \end{vmatrix}$$

abbia caratteristica c data da

$$(5) \quad c = \binom{m+r}{r} + \binom{k+s}{s} - \binom{k+r}{r} - t.$$

Nella (4) si sono indicate con $S(r)$ le $\binom{m+r}{r}$ righe costituite dal punto x e dai suoi derivati primi, secondi, ..., r -esimi rispetto a τ_i , con $A(r+1)$ le $\binom{k+r}{r+1}$ righe costituite dai punti derivati $(r+1)$ -esimi di $\bar{x}$ rispetto a t_i ed analogamente per $A(r+2), \dots, A(s)$.

Indichiamo con $\bar{x}^{i_1 i_2 \dots i_s}$ i punti derivati s -esimi di $\bar{x}$ sulla V_k , essendo $(i_1, i_2, \dots, i_s)$ una qualunque combinazione con ripetizione di classe s dei numeri $1, 2, \dots, k$. Se la matrice (4) ha esattamente caratteristica c data dalla (5), ne consegue l'esistenza di t relazioni del tipo

$$(6) \quad \sum_{i_1 i_2 \dots i_s} a_{i_1 i_2 \dots i_s}^{(j)} \bar{x}^{i_1 i_2 \dots i_s} + [S(r), A(r+1), \dots, A(s)]^{(j)} = 0$$

($j = 1, 2, \dots, t$),

essendo le $\alpha^{(j)}$ funzioni di $t_1, t_2, \dots, t_k$ non tutte identicamente nulle ⁽³⁾ ed indicando con $[S(r), A(r+1) \dots, A(s-1)]^{(j)}$ una combinazione lineare dei punti rappresentati da quei simboli.

Consideriamo ora un S_{k-1} proiettivo ed indichiamo con $y_1, y_2, \dots, y_k$ le coordinate omogenee di punto. Diremo *sistema lineare associato alla $V_k \sigma_{r,s}^t$* , il sistema lineare di ordine s e dimensione $t-1$ individuato dalle t ipersuperficie di equazioni

$$(7) \quad \sum_{i_1 i_2 \dots i_s} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_s}^{(j)} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_s} = 0.$$

Le t ipersuperficie (7) sono fra loro linearmente indipendenti poichè, nell'ipotesi opposta, sarebbero linearmente dipendenti i punti $S(r), A(r+1), \dots, A(s-1)$ e quindi la V_k sarebbe quasi-asintotica di indici inferiori ad r ed s , cosa che noi qui escludiamo. Si ha inoltre che

ogni proprietà proiettiva del sistema lineare individuato dalle (7) si traduce in una proprietà proiettiva della corrispondente $V_k \sigma_{r,s}^t$.

Ciò consegue dal fatto che i cambiamenti del fattore di proporzionalità e dei parametri sulla V_k si riflettono in una omografia dell' S_{k-1} rappresentativo. In altri termini cambiando rappresentazione della V_k si ottengono sistemi lineari associati fra loro omografici.

Infatti, introducendo sulla V_k nuovi parametri

$$u_h = u_h(t_1, t_2, \dots, t_k) \quad (h = 1, 2, \dots, k),$$

indicando con $\xi(u_1, u_2, \dots, u_k)$ il punto generico sulla V_k , dalla identità $\xi = \rho \alpha$, derivando, si ha

$$(8) \quad \bar{x}^{i_1 i_2 \dots i_s} = \frac{1}{\rho} \sum_{j_1 j_2 \dots j_s} \xi^{j_1 j_2 \dots j_s} u_{j_1}^{i_1} u_{j_2}^{i_2} \dots u_{j_s}^{i_s} + [s-1],$$

dove $\xi^{j_1 j_2 \dots j_s} = \frac{\partial^s \xi}{\partial u_{j_1} \partial u_{j_2} \dots \partial u_{j_s}}$ ed $[s-1]$ indica una combinazione lineare di punti derivati di ordine $\leq s-1$. Si vede allora che il nuovo sistema lineare associato è quello individuato dalle ipersuperficie dell' $S_{k-1}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$ ottenute applicando alle (7) l'omografia non degenera ⁽⁴⁾

$$(9) \quad y_i = \sum_h u_h^i \eta_h \quad (i, h = 1, 2, \dots, k).$$

3. Le V_k quasi-asintotiche $\sigma_{r,s}$ della stessa specie t si potranno

⁽³⁾ Ciò se si vuole, come qui supporremo, che la V_k sia quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ e non di indici inferiori ad r ed s .

⁽⁴⁾ L'omografia (9) è certo non degenera poichè il suo discriminante $|u_h^i|$ è l'Jacobiano delle funzioni u_h , necessariamente $\neq 0$.

così classificare in tipi proiettivamente distinti in base alle proprietà proiettive dei relativi sistemi lineari associati (5).

Quanto precede non ha senso per $k=1$ e quindi non si presenta una analoga classificazione per le curve quasi-asintotiche.

Nei casi $k > 1$ se la specie t assume il suo massimo valore $t = \binom{k+s-1}{s}$, il sistema lineare associato è il sistema totale delle ipersuperficie di ordine s di S_{k-1} e quindi, seguendo la via indicata, non si ottengono tipi proiettivamente distinti di $V_k \sigma_{r,s}$.

Vediamo ad es. come già in ciascuno dei due casi delle superficie $\sigma^1_{1,2}$ e $\sigma^2_{1,2}$ si presentano due tipi proiettivamente distinti.

Data la V_m descritta dal punto

$$x = x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$

si consideri la $V_2 \tau_3 = \tau_4 = \dots = \tau_m = \text{cost.}$; affinchè tale V_2 sia quasi-asintotica $\sigma^1_{1,2}$ occorre si abbia

$$(10) \quad a_{11}x^{11} + 2a_{12}x^{12} + a_{22}x^{22} + [S(1)] = 0,$$

dove le a_{ik} sono funzioni di τ_1, τ_2 non tutte nulle. Il sistema lineare associato si riduce alla coppia di punti, rappresentata dall'equazione

$$(11) \quad a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 = 0.$$

La $V_2 \sigma^1_{1,2}$ può essere di due tipi proiettivamente distinti a seconda che tale coppia è formata da punti distinti o coincidenti.

Affinchè la V_2 sia $\sigma^2_{1,2}$ occorre esistano due relazioni del tipo

$$(12) \quad \begin{aligned} a_{11}x^{11} + 2a_{12}x^{12} + a_{22}x^{22} + [S(1)] &= 0 \\ b_{11}x^{11} + 2b_{12}x^{12} + b_{22}x^{22} + [S(1)]^* &= 0. \end{aligned}$$

Il sistema associato è l'involuzione ∞^1 di coppie di punti di una retta individuata dalle due coppie

$$(13) \quad \begin{aligned} a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 &= 0 \\ b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

(5) Fatti analoghi si presentano nello studio delle varietà integrali di un sistema di equazioni alle derivate parziali lineari ed omogenee. Si vedano ad es.: E. BOMPIANI, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*, « Atti Acc. Sci. Torino », 49 pp. 83-131 (1913-14); A. TERRACINI, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*, I., « Atti Acc. Sci. Torino », 49, pp. 214-247 (1913-14).

Si possono presentare due casi: a) l'involuzione non ha un punto fisso; b) l'involuzione possiede un punto fisso. A seconda dell'uno o dell'altro caso si hanno due tipi proiettivamente distinti di $\sigma^2_{1,2}$.

4. La classificazione precedente appare interessante quando si voglia dar risposta alla seguente questione:

Data una V_2 quasi-asintotica $\sigma^1_{1,2}$ di una V_m ($m > 2$), vedere se esistono sulla V_2 (e quante) delle curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2}$, per V_m .

È intanto evidente che se la V_2 è $\sigma_{1,2}$ di specie 3 (massima) ogni sua curva è $\gamma_{1,2}$ per V_m e inversamente.

Se poi la V_2 è $\sigma^2_{1,2}$ possiede sempre due sistemi ∞^1 (distinti o coincidenti) di curve $\gamma_{1,2}$ per la V_m .

Se infine la V_2 è $\sigma^1_{1,2}$ non possiede curve $\gamma_{1,2}$ per la V_m se i punti (11) sono distinti e ne possiede invece un sistema ∞^1 se tali punti coincidono.

Si ha cioè:

Se una V_2 di una V_m ($m > 2$) è quasi-asintotica $\sigma^2_{1,2}$ possiede due sistemi ∞^1 di curve $\gamma_{1,2}$ per V_m che risultano distinti o coincidenti a seconda che l'involuzione associata alla V_2 non possiede o possiede un punto fisso e inversamente.

Supponiamo infatti che la V_2 sia $\sigma^2_{1,2}$, onde sussistano le (12). Affinchè una curva $\tau_2 = \tau_2(\tau_1)$ sia $\gamma_{1,2}$ per la V_m occorre si abbia, avuto riguardo alle (12),

$$\left| \begin{array}{cc} a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_{22} & a_{11} \\ b_{22} & b_{11} \end{array} \right| \tau_2' + \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{array} \right| (\tau_2')^2 = 0.$$

Si hanno dunque due sistemi ∞^1 di $\gamma_{1,2}$ che risultano distinti o coincidenti a seconda che le due coppie di punti (13) non hanno oppure hanno un punto in comune.

Inversamente se una V_2 possiede due sistemi distinti di $\gamma_{1,2}$ per la V_m , si possono assumere come linee coordinate sulla V_2 ed allora si vede subito che la V_2 è $\sigma^2_{1,2}$ del tipo a). E così se la V_2 possiede due sistemi ∞^1 di $\gamma_{1,2}$ coincidenti, basterà assumere le $\gamma_{1,2}$ come linee $\tau_2 = \text{cost.}$ per provare che la V_2 è $\sigma^1_{1,2}$ del tipo b).

Si ha infine:

Se una V_2 è $\sigma^1_{1,2}$ per una V_m essa non possiede in generale curve $\gamma_{1,2}$ per V_m e la condizione necessaria e sufficiente affinchè possieda un semplice sistema ∞^1 di $\gamma_{1,2}$ è che i due punti (11) associati alla V_2 coincidano.

Supponiamo che la V_2 sia $\sigma^1_{1,2}$ e quindi che sussista una relazione del tipo (10). Affinchè una curva $\tau_2 = \tau_2(\tau_1)$ sia $\gamma_{1,2}$ per la

V_m occorre si abbia, avendo riguardo alla (10) ⁽⁶⁾,

$$(14) \quad \begin{aligned} a_{11}\tau_2' - a_{12} &= 0 \\ a_{11}(\tau_2')^2 - a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Il sistema (14) ha soluzione se e solo se

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

e quindi se i due punti (11) coincidono.

Se inversamente la V_2 possiede un solo sistema ∞^1 di curve $\gamma_{1,2}$ per V_m si prova subito che è $\sigma^1_{1,2}$ del tipo sopradetto assumendo le $\gamma_{1,2}$ come $\tau_2 = \text{cost.}$