Bollettino Unione Matematica Italiana

Giulio Supino

Sopra i teoremi di Lord Rayleigh.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 261–266.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_261_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Sopra i teoremi di Lord Rayleigh.

Nota di GIULIO SUPINO (a Bologna).

Sunto. - *L'A. svolge alcune osservazioni sui teoremi di confronto di* LORD RAYLEIGH *(nella teoria delle piccole oscillazioni) mostrando che per una larga classe di sistemi in equilibrio le oscillazioni sono indipendenti dalla variazione delle masse, mentre per altri sistemi si possono avere variazioni degli autovalori in vario senso quando si alterino masse differenti, sicchè non sembra possibile stabilire un teorema generale relativo alla variazione degli autovalori con le masse (e analogo a quelli relativi alle variazioni degli autovalori provocate da variazioni dell'energia cinetica o della capacità).*

1. Sia dato un sistema meccanico, olonomo, ad n gradi di libertà, soggetto a forze conservative di potenziale U e sia C_0 una sua configurazione di equilibrio stabile, nella quale il massimo relativo di U si possa riconoscere dall'esame dei valori locali delle sue derivate seconde. È noto che se lo stato di equilibrio C_0 si altera abbastanza poco, il sistema si muove indefinitamente nella immediata prossimità di C_0. In queste condizioni, definita rispetto ad opportune coordinate lagrangiane q, la energia potenziale

$$V = -U = \sum_{ik}^{n}{}_{1}\, a_{ik} q_i q_k$$

(si sono attribuiti al sistema in equilibrio valori nulli delle q, ciò che è sempre ammissibile essendo U definito a meno di una co-

([2]) Cfr. i lavori di W. BURAU in corso di stampa nella « Collectanea Matematica » di Barcellona.

([3]) Cfr. il libro W. BLASCHKE e G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Berlin, 1938 ed un lavoro di BLASCHKE, che forse apparirà nei « Rendiconti del Seminario Matematico di Messina ».

stante) e la energia cinetica

$$\mathcal{T} = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$$

(la $\mathcal{T}$ è forma quadratica omogenea perchè i vincoli non dipendono dal tempo) il moto è determinato dalle equazioni di LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad (\mathfrak{L} = \mathcal{T} + U).$$

Tale moto è rappresentato da piccoli movimenti intorno a C_0, movimenti che risultano composizione di moti armonici.

La frequenza delle oscillazioni (spontanee) si può trovare riducendo a forma canonica le due forme quadratiche,

$$V = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}q_iq_k\,, \qquad \overline{\mathcal{T}} = \sum_{1}^{n} b_{ik}q_iq_k\,.$$

Dato che $\overline{\mathcal{T}}$ è definita positiva così esiste una trasformazione lineare

$$q_h = \sum_{k=1}^{n} C_{hk}X_k \qquad (h = I \ldots n)$$

per la quale si ha

$$V = \sum_{1}^{n} \omega_k^2 X_k^2\,, \qquad \overline{\mathcal{T}} = \sum_{1}^{n} X_h^2$$

I coefficienti ω_k^2 si chiamano "autovalori" e sono i prodotti dei quadrati delle frequenze per $4\pi^2$ cioè è $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con T periodo. Ciò premesso sussistono, com'è noto, i seguenti teoremi di confronto dovuti a LORD RAYLEIGH:

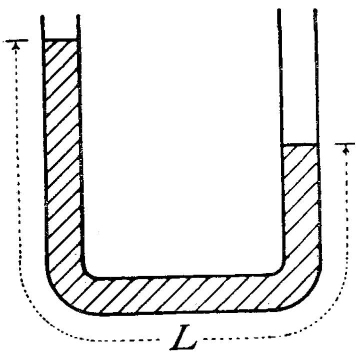

Fig. 1.

TEOREMA 1. – Quando, in un sistema vibrante S si introducono r nuovi vincoli (che lasciano inalterata la posizione di equilibrio C_0) allora l'autovalore ω'^2_k del nuovo sistema S' è conpreso fra gli autovalori (di S) ω_k^2 e ω^2_{k+r}.

TEOREMA 2. – Quando cresce la energìa cinetica $\mathcal{T}$ del sistema allora ω'_k è minore ed uguale ad ω_k.

TEOREMA 3. – Quando cresce la energia potenziale (cioè, come si dice, aumenta la capacità del sistema) allora è $\omega'_k \geq \omega_k$.

Questi tre teoremi non hanno la stessa portata. Mentre è chiaro cosa significa l'introduzione di nuovi vincoli, invece l'aumento dell'energia cinetica può avvenire sia perchè cresce la velocità dei singoli punti del sistema, sia perchè, a parità di velocità, crescono le masse concentrate in quei punti. Ma quando crescono le masse, allora, nel campo della gravità, cresce anche l'energia potenziale. Pertanto, in questo caso, i teoremi 2 e 3 non indicano, neppure approssimativamente, come possono variare le frequenze. Tuttavia esistono esempi concreti in proposito: per esempio il pendolo matematico e le colonne liquide oscillanti. In tutti e due i casi la durata delle oscillazioni è espressa da relazioni

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}\right)$$

che non dipendono dalla massa in gioco.

Mi propongo, in questa nota, di svolgere alcune osservazioni sull'argomento.

2. Premettiamo alcune considerazioni di carattere dimensionale. Le due forme $-U$ e $\mathcal{T}$ sono delle stesse dimensioni (ML^2T^{-2}) ma le q_i, coordinate generalizzate non è detto siano delle lunghezze (potrebbero, per es. essere angoli, come nel caso del pendolo, od aree, come nella teoria delle perturbazioni del moto Kepleriano [1]). Conviene, per ragionare con precisione, dividere, ogni q_i per una grandezza costante delle stesse dimensioni in modo da ottenere al posto delle q_i un numero puro.

Perciò, indicata con l_0 una lunghezza opportuna, lascieremo q_i invariato se è già un numero puro, considereremo q_i/l_0 al posto di q_i se q_i è una lunghezza, q_i/l_0^2 se q_i è un'area etc.

I numeri puri così ottenuti saranno indicati con θ_i. Analogamente, fissata una frequenza opportuna φ_0 considereremo al posto di $\dot\theta_i$ i $\dot\theta_i/\varphi_0$.

Quanto alle a_{ik}, b_{ik} noi penseremo che anche questi coefficienti siano ricondotti a numeri puri riportando la parte dimensionale alle costanti A, g (g accelerazione di gravità) e B oltre che ad l_0, φ.

In definitiva scriveremo

$$V = -U = Agl_0 \sum_1^n{}_{ik}\alpha_{ik}\theta_i\theta_k$$

$$\mathcal{T} = Bl_0^2\varphi_0^2 \sum_1^n{}_{ik}\beta_{ik}\dot\theta_i/\varphi_0\dot\theta_k/\varphi_0 .$$

[1] Alludo alla variabile G nella teoria delle perturbazioni del primo ordine.

Pertanto la parte dimensionale di V e $\mathfrak{T}$ è concentrata nei termini Agl_0, $Bl_0^2\varphi_0^2$ ed è $[A]=M, [B]=M$ perchè $[l_0]=L$, $[\varphi_0]=T^{-1}$, $[g]=LT^{-2}$.

Le frequenze ω saranno funzioni di A, B, g, l_0, φ_0, α_{ik}, β_{ik}, cioè avremo:

$$\omega = f(A,\ B,\ g,\ l_0,\ \varphi;\ \alpha_{ik},\ \beta_{ik}),$$

Per il teorema di Vaschy-Riabuchiski-Buckingam si ha

$$\omega = \sqrt{g/l_0}\ f_1\left(\frac{A}{B},\ g/l_0\varphi_0^2;\ \alpha_{ik},\ \beta_{ik}\right) \tag{1}$$

e da questa si deduce intanto, fermi restando i valori di α_{ik}, β_{ik}:

a) che se si moltiplicano per uno stesso valore tutte le masse, le frequenze restano invariate,

b) che se si moltiplicano per uno stesso valore p tutte le lunghezze, le frequenze restano divise per $\sqrt{p}$.

A questa osservazione si aggiunga:

c) che dal teorema II di Lord Rayleigh risulta subito come l'aumento di una qualunque β_{ik} abbassi o almeno non innalzi gli autovalori,

d) che dal teorema III risulta come l'aumento di una qualunque α_{ik} innalzi o almeno non abbassi gli autovalori.

Quindi

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_{ik}} \geq 0 \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial \beta_{ik}} \leq 0.$$

3. L'interesse delle relazioni *a*) e *b*) è limitato dal fatto che esse si riferiscono ad una variazione uniforme (mentre le osservazioni *c*) e *d*) non aggiungono nulla ai teoremi già noti). In qualche caso tuttavia, è possibile affermare qualcosa di più.

Ed infatti supponiamo, per es., che il sistema in equilibrio nella posizione C_0 contenga due masse eguali, che sia simmetrico

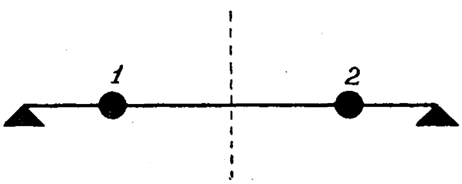

Fig. 2.

rispetto ad un piano (ovviamente equidistante dalle due) e che cresca solo la massa 1. Poichè una variazione uniforme delle masse non modifica gli autovalori così l'aumento della massa 1 ha lo stesso effetto che una diminuzione della massa 2. Ma il sistema è simmetrico: tanto vale aumentare la massa 2 che la massa 1; dunque l'aumento della massa 1 ha lo stesso effetto della sua diminuzione.

Ciò dimostra che gli autovalori non si modificano (e che restano gli stessi anche se si ha una sola massa potendosi diminuire la seconda fino a farla tendere a zero).

Potrà sembrare poco comune il fatto che si abbiano due masse uguali senza che tra loro esista un collegamento di carattere elastico, o viscoso o simile. Per esempio un caso comune è che si debbano considerare due o più masse sopra una trave, con vincoli fissi (e per fissare le idee poniamo che essa sia appoggiata agli estremi): allora oltre alle masse interviene un coefficiente di elasticità che caratterizza la reazione della trave e l'affermazione precedente non è più vera.

Infatti se due masse m_1, m_2, oscillano alle estremità di una trave, si trova

$$\omega^2 = \frac{d_0(m_1 + m_2)}{l m_1 m_2}$$

dove d_0 è un coefficiente che rappresenta la reazione della trave alla forza unitaria (dimensioni MLT^{-2}) (Cfr. per es. FOPPL: *Grundzüge der Technischen Schwingungslehre*. Berlino, 1923).

Se però si osserva che quando crescono le masse la trave non sarà più in grado di sopportare con la stessa sezione le masse stesse e la loro vibrazione dinamica e si chiede che, in condizioni statiche, la sollecitazione resti sensibilmente invariata, (ciò che, del resto, corrisponde ad imporre che α_{ik}, β_{ik} restino invariati) allora conviene scrivere

$$d_0 = kg(m_1 + m_2)$$

(k numero puro, g accelerazione di gravità) e si constata subito che ω non dipende dalle due masse.

Numerosi altri esempi potrebbero essere dati in questo campo.

4. Può nascere il sospetto che sia possibile provare non solo nei casi considerati (che pure hanno una certa ampiezza) ma in tutti i casi di sistemi vibranti, un'affermazione di invarianza degli autovalori rispetto a variazioni isolate di alcune masse. Ma è facile mostrare che una tale conclusione sarebbe falsa.

Por convincersene basta considerare il sistema di due pendoli matematici a catena, sistema che si risolve facilmente e che ha due gradi di libertà. La soluzione (cfr. per es. COLE: *Theory of*

Vibration for Engineers, Londra, 1950, pag. 63) dà luogo alla seguente equazione per gli autovalori:

$$(\omega^2)^2 - (1 + R)g\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)\omega^2 + (1 + R)\frac{g^2}{l_1 l_2} = 0$$

e quindi agli autovalori

$$\omega^2 = \frac{1 + R}{2}(g/l_1 + g/l_2)\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4l_1 l_2}{(1 + R)(l_1 + l_2)^2}}\right\}$$

nei quali è posto

$$R = \frac{P_2}{P_1}$$

essendo P_1 e P_2 i pesi rispettivi dei due elementi della catena, l_1, l_2, le distanze dei pesi dalle rispettive articolazioni (v. fig. 3).

Facciamo crescere P_1 lasciando invariati P_2 e le due lunghezze. Allora R diminuisce e quindi diminuisce

$$\omega_1^2 = \frac{1 + R}{2} g\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4l_1 l_1}{(1 + R)(l_1 + l_1)^2}}\right)$$

mentre

$$\omega_2^2 = \frac{1 + R}{2} g\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4l_1 l_2}{(1 + R)(l_1 + l_2)^2}}\right)$$

può crescere od anche diminuire; ciò mostra intanto che si può disporre di R in modo che una sua variazione porti a far diminuire una frequenza e far crescere l'altra.

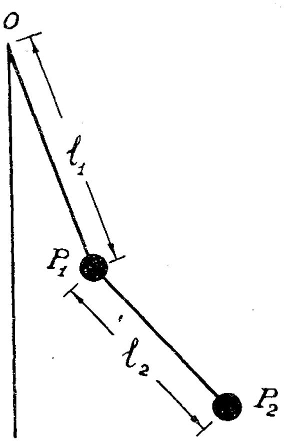

Fig. 3.

Ma vi è di più. Supponiamo di aver constatato in un sistema generico che per es., al crescere uniforme di alcune masse m_i cresca anche ω_1. Poichè facendo crescere uniformemente tutte le masse, ω_1 resta fisso. così l'aumento delle masse m_i è equivalente ad una diminuzione uniforme delle rimanenti m_k. Quindi ω_1 cresce al diminuire di m_k, cioè ω_1 diminuisce al crescere di m_k. Tanto basta per concludere che la variazione delle m_i, m_k, ha effetti opposti su ω_1.

Non sembra dunque possibile stabilire una legge di variazione in un sol senso alterando ad arbitrio uno dei due sistemi di masse.