Bollettino
Unione Matematica Italiana

Bruno Finzi

Discontinuità dei campi elettromagnetici nello spazio-tempo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 252–259.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_252_0>

Discontinuità dei campi elettromagnetici nello spazio-tempo.

Nota di BRUNO FINZI (a Milano).

Sunto - *Si considerano le varietà caratteristiche dei fenomeni elettromagnetici nello spazio-tempo; si rappresentano con tensori spazio-temporali le discontinuità attraverso tali varietà e con semplici leggi tensoriali le condizioni a cui le discontinuità soddisfano.*

Nello studio dei fenomeni fisici alle discontinuità attraverso i fronti d'onda, che sono superficie mobili dell'ordinario spazio geometrico tridimensionale, si fanno corrispondere discontinuità attraverso varietà caratteristiche, riguardate come ipersuperficie di uno spazio rappresentativo cinematico, euclideo, quadridimensionale (1), e ciò in particolare anche per i fenomeni elettromagnetici. Però la sede dei fenomeni elettromagnetici non è separatamente lo spazio e il tempo, bensì l'insieme dei due, lo spazio-tempo, il quale anche nel solo ambito della relatività ristretta, non è euclideo, ma pseudoeuclideo. In questo spazio-tempo le quantità elettromagnetiche sono rappresentate da scalari, vettori, tensori, e le leggi fisiche da relazioni tensoriali, per loro natura invarianti di fronte ad un generico cambiamento del riferimento spazio-temporale.

(11) La (10) prova che per le superficie W della classe particolare definita dalla (6) un sistema *quadruplo* di linee principali con $\sigma \geq 8$ è necessariamente *quintuplo*. Una mia allieva sta esaminando se questa proprietà ha portata generale.

(1) Cfr. J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes, etc.*, Paris, 19 3; T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa,* Bologna, 1931.

Mi sembra naturale riguardare anche le varietà caratteristiche dei fenomeni elettromagnetici nello spazio-tempo precedente, e qui rappresentare con tensori le discontinuità attraverso a tali varietà, e con leggi tensoriali le condizioni a cui le discontinuità stesse debbono soddisfare, così che le leggi ubbidiscano automaticamente al principio di relatività. È appunto questo il fine che si propone questa Nota, la quale trova la sua giustificazione nella semplicità concettuale e insieme nella generalità dei risultati a cui perviene.

1. Consideriamo da prima il campo elettromagnetico *nel vuoto*.

Riteniamo lo spazio-tempo pseudoeuclideo e scegliamo il riferimento in modo che la metrica assuma la seguente forma pseudopitagorica:

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx^{0^2} - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}). \tag{1}$$

Nella (1) e nelle formule successive gli indici contrassegnati con lettere greche assumono i valori 0, 1, 2, 3 (mentre gli indici contraddistinti con lettere latine assumono i valori 1, 2, 3) ed è sottinteso il segno di sommatoria rispetto agli indici che sono saturati; $x^0 = ct$ è la coordinata temporale, essendo c la velocità della luce nel vuoto rispetto ad un osservatore inerziale, $x^1 x^2 x^3$, cioè $x^i (i = 1, 2, 3)$ sono le tre coordinate cartesiane ortogonali xyz nell'ordinario spazio geometrico tridimensionale.

Secondo MINKOWSKI, i due vettori $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ dello spazio geometrico tridimensionale, che individuano il campo elettrico e il campo magnetico, trovano rappresentazione in un unico tensore doppio emisimmetrico dello spazio-tempo $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$, il tensore elettromagnetico. e $F_{i0} = E_i$, $F_{ii+1} = H_{i+2}$ $(i = 1, 2, 3)$; lo scalare ρ che dà la densità elettrica e il vettore $\boldsymbol{I}$ dello spazio geometrico tridimensionale, costituente la corrente specifica, trovano rappresentazione in un unico vettore spazio-temporale j_α, il vettore distribuzione elettrica, e $j^0 = \rho$, $j^i = I^i/c$.

Le leggi elettromagnetiche maxwelliane si traducono nelle seguenti due leggi tensoriali: il campo elettromagnetico è irrotazionale, cioè

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta/\gamma} = 0 \,; \tag{2}$$

la sua divergenza eguaglia la distribuzione elettrica, cioè

$$F_{\alpha\beta}^{/\beta} = j_\alpha \,. \tag{3}$$

Nella (2) $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è il tensore emisimmetrico di RICCI dello spazio-tempo quadridimensionale considerato, e nella (2) e nella (3) la lineetta che precede un indice è simbolo di derivazione tensoriale [2].

Sia

$$\tau(x^\alpha) = \text{cost.} \tag{4}$$

l'equazione delle varietà caratteristiche del sistema differenziale di primo ordine formato dalle (2) e (3). In ogni istante i fronti d'onda hanno per equazione la (4). Attraverso le ipersuperficie di equazione (4) il tensore $F_{\alpha\beta}$ e il vettore j_α non subiscono discontinuità, e le discontinuità $DF_{\alpha\beta/\gamma}$ delle derivate di $F_{\alpha\beta}$ sono tali che $DF_{\alpha\beta/\gamma}dx^\gamma = 0$ quando i dx^γ verificano la condizione $\tau_{/\gamma}dx^\gamma = 0$. Ne segue:

$$DF_{\alpha\beta/\gamma} = \Lambda_{\alpha\beta}\tau_{/\gamma}, \tag{5}$$

dove $\Lambda_{\alpha\beta}$ è un tensore doppio emisimmetrico a priori arbitrario, che, nota la funzione $\tau(x^\alpha)$, individua le discontinuità. La (5) riassume le condizioni cinematiche relative alle discontinuità.

Scrivendo la (2) e la (3) da una banda e dall'altra di una varietà caratteristica, facendo la differenza, ricordando la (5) e ricordando che $Dj_\alpha = 0$, si ottiene:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda_{\alpha\beta}\tau_{/\gamma} = 0\,, \tag{6}$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}\tau^{/\beta} = 0\,. \tag{7}$$

La (6) e la (7) traducono le condizioni fisiche relative alle discontinuità individuate dal tensore $\Lambda_{\alpha\beta}$.

La (7) afferma che il tensore $\Lambda_{\alpha\beta}$, che diremo *tensore di discontinuità,* è normale al vettore $\operatorname{grad}\tau$. La (6) afferma che il tensore $^*\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\Lambda^{\sigma\rho}$, coniugato del tensore di discontinuità, è anche esso normale al vettore $\operatorname{grad}\tau$, cioè

$$^*\Lambda_{\alpha\beta}\tau^{/\beta} = 0; \tag{6'}$$

e poichè $\operatorname{grad}\tau$ è normale alle varietà caratteristiche, leggeremo le condizioni fisiche di compatibilità così: *nel vuoto, sia il tensore di discontinuità* $\Lambda_{\alpha\beta}$ *che il suo coniugato* $^*\Lambda_{\alpha\beta}$ *sono tangenti alle varietà caratteristiche.*

Risolvendo la (6) rispetto a $\Lambda_{\alpha\beta}$, si ha:

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \tau_{/\alpha}\,q_\beta - \tau_{/\beta}\,q_\alpha\,, \tag{8}$$

[2] Cfr. ad es. B. Finzi e M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni,* Bologna, 1949, cap. IX.

Si tenga presente che, secondo la consueta convenzione, gli indici in basso sono di covarianza e quelli in alto di controvarianza.

dove q_β è un vettore a priori arbitrario, definito a meno dell'addendo $k\tau_{/\beta}$ parallelo a grad τ, e si può sempre (per $\tau_{/0} \neq 0$) determinare il fattore scalare k in modo da verificare la seguente condizione:

$$q_0 = 0\,. \tag{9}$$

Come si vede $\Lambda_{\alpha\beta}$ è un tensore «semplice», perchè la (8) lo esprime mediante i due vettori $\tau_{/\beta}$ e q_β.

Poniamo la (8) nella (7) e teniamo conto della (9). Avremo:

$$\tau_{/\alpha}\tau^{/b} q_b - \tau_{/\beta}\tau^{\beta} q_\alpha = 0 \qquad (b = 1, 2, 3\,;\ \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3). \tag{10}$$

Da questa, per $\alpha = 0$, si deduce (ricordando la (9)) $\tau^{/b} q_b = 0$, si deduce cioè che il vettore dello spazio geometrico tridimensionale di componenti q_b è normale al fronte d'onda. La (10) diviene perciò:

$$\tau_{/\beta}\tau^{/\beta} q_\alpha = 0. \tag{11}$$

Affinchè la (4) rappresenti un'effettiva varietà caratteristica, bisogna che non sia $q_\alpha = 0$, perchè, se ciò fosse, dalla (8) si trarrebbe $\Lambda_{\alpha\beta} = 0$ e quindi assenza di discontinuità. Bisogna dunque che la (11) ammetta per q_α soluzione non nulla, e ciò esige che sia

$$\tau_{/\beta}\tau^{/\beta} = 0. \tag{12}$$

La (12), la quale afferma che il modulo del vettore spazio-temporale grad τ è nullo, è l'equazione differenziale delle varietà caratteristiche (4).

Dalla (12) non si deduce affatto che la funzione τ è una costante, grazie al segno — che compare nella (1). La (12) si scrive infatti, nel riferimento presupposto alla (1), così:

$$\left(\frac{\partial\tau}{c\partial t}\right)^2 - \left\{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2\right\} = 0, \tag{12'}$$

e da essa si deduce che la velocità d'avanzamento dei fronti d'onda

$$\left|\frac{\partial\tau}{\partial t}\right| \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2}$$

eguaglia la velocità della luce c.

2. Consideriamo ora il campo elettromagnetico *in un dielettrico omogeneo e isotropo*, di coefficiente dielettrico η e coefficiente di permeabilità magnetica μ.

È possibile in questo caso scrivere le leggi elettromagnetiche nella forma (2) e (3) nello spazio-tempo di metrica (1), dove però

$x^0 = Vt$, essendo

$$V = \frac{c}{\sqrt{\eta\mu}}. \tag{13}$$

Nel caso in esame il tensore doppio emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$ è legato ai due vettori dello spazio geometrico tridimensionale $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$, che rappresentano il campo elettrico e il campo magnetico, dalle relazioni

$$F_{i0} = \eta E_i \quad , \quad F_{i\,i+1} = H_{i+2}\sqrt{\eta\mu} \quad (i = 1, 2, 3),$$

e il vettore j_α è legato allo scalare ρ, che rappresenta la densità elettrica, e al vettore dello spazio geometrico tridimensionale $\boldsymbol{I}$, che rappresenta la corrente specifica, dalle relazioni

$$j^0 = \rho \quad , \quad j^i = I^i/V \quad (i = 1, 2, 3)\ (^3).$$

Introducendo il tensore $\Lambda_{\alpha\beta}$ che dà, mediante le condizioni cinematiche espresse dalla (5), le discontinuità attraverso alle varietà caratteristiche delle derivate del tensore $F_{\alpha\beta}$ ora considerato, le condizioni fisiche relative alle discontinuità sono ancora tradotte dalla (6) (o dalla (6')) e dalla (7). Valgono quindi ancora le conclusioni del paragrafo precedente, e le varietà caratteristiche soddisfano ancora all'equazione differenziale (12). Quest'ultima si scrive ora però esplicitamente così:

$$\left(\frac{\partial\tau}{V\partial t}\right)^2 - \left\{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2\right\} = 0. \tag{12''}$$

Ne segue che i fronti d'onda avanzano normalmente non con velocità c, bensì con la velocità V data dalla (13), che rappresenta la velocità della luce nel dielettrico omogeneo e isotropo considerato.

3. Secondo Mie [4], un generico campo elettromagnetico *nella materia* può rappresentarsi nello spazio–tempo pseudoeuclideo di metrica (1) (con $x^0 = ct$ coordinata temporale e $x^1x^2x^3$ coordinate cartesiane ortogonali spaziali) mediante due tensori doppi emisimmetrici $F_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$ genericamente legati fra loro: il primo sintetizza il campo elettrico e l'induzione magnetica, il secondo il campo magnetico e l'induzione elettrica. Se j_α dà la distribuzione elettrica ($j^0 = \rho$, $j^i = I^i/c$ per $i = 1, 2, 3$), le equazioni elettromagne-

(3) Cfr. V Volterra, « Conf. Univ. di Praha e Brno », 1932, p. 48.
(4) G. Mie, « Ann. d. Phys. », 37, 39, 40 (1912-13); 85 (1928).

tiche sono le due seguenti:

$$(14) \qquad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta/\gamma} = 0 \quad , \quad f_{\alpha\beta}^{/\beta} = j_\alpha \, .$$

Queste naturalmente si riducono alle (2) e (3) nel vuoto, allorchè $F_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}$.

Le discontinuità attraverso le varietà caratteristiche d'equazione (4) sono individuabili, grazie alle condizioni cinematiche

$$(15) \qquad DF_{\alpha\beta/\gamma} = \Lambda_{\alpha\beta}\tau_{/\gamma} \quad , \quad Df_{\alpha\beta/\gamma} = \lambda_{\alpha\beta}\tau_{/\gamma} \, ,$$

mediante i due tensori doppi emisimmetrici $\Lambda_{\alpha\beta}$ e $\lambda_{\alpha\beta}$, legati fra loro come $F_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$, ma genericamente distinti.

Le condizioni fisiche a cui debbono soddisfare sulle varietà caratteristiche i due tensori $\Lambda_{\alpha\beta}$ e $\lambda_{\alpha\beta}$ di discontinuità sono le seguenti:

$$(16) \qquad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda_{\alpha\beta}\tau_{/\gamma} = 2{}^*\Lambda^{\gamma\delta}\tau_{/\gamma} = 0 \quad , \quad \lambda^{\alpha\beta}\tau_{/\beta} = 0.$$

Queste affermano che *il tensore di discontinuità delle derivate di* $f_{\alpha\beta}$ *e quello coniugato delle derivate di* $F_{\alpha\beta}$ *sono tangenti alle varietà caratteristiche.*

Supponiamo, in particolare, *lineare* il legame fra $F_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$. Allora

$$(17) \qquad f_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \quad , \quad \lambda_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\rho\sigma}\Lambda^{\rho\sigma} \, .$$

Manifestamente il tensore quadruplo $C_{\alpha\beta\rho\sigma}$, che dipende dalla natura del mezzo sede del campo, gode delle seguenti proprietà formali:

$$C_{\alpha\beta\rho\sigma} = - C_{\beta\alpha\rho\sigma} = - C_{\alpha\beta\sigma\rho}$$

e, se la densità d'azione elementare $\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}df^{\alpha\beta}$ è un'espressione differenziale esatta,

$$C_{\alpha\beta\rho\sigma} = C_{\rho\sigma\alpha\beta} \, .$$

Con queste emisimmetrie e simmetria le componenti distinte e non nulle del tensore quadruplo $C_{\alpha\beta\rho\sigma}$ si riducono a ventuno: ventun costanti dipendenti dal mezzo sede del campo, se questo mezzo è omogeneo.

Nel caso in esame le (16) si scrivono così:

$$(18) \qquad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda_{\alpha\beta}\tau_{/\gamma} = 0 \quad , \quad C^{\alpha\beta\rho\sigma}\Lambda_{\rho\sigma}\tau_{/\beta} = 0.$$

Risolvendo la prima delle (18) rispetto a $\Lambda_{\alpha\beta}$, si ha, analogamente alla (8):

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \tau_{/\alpha}q_\beta - \tau_{/\beta}q_\alpha \, ,$$

dove q_β indica un vettore, a priori arbitrario, definito a meno dell'addendo $k\tau_{/\beta}$ parallelo a grad τ, e (se $\tau_{/0} \neq 0$) si può sempre determinare il fattore scalare k in modo da verificare la (9). Ponendo l'espressione trovata per $\Lambda_{\alpha\beta}$ nella seconda delle (18), questa diviene:

$$H^{\varkappa\sigma}q_\sigma = 0 \quad , \quad \text{essendo} \quad H^{\varkappa\sigma} = 2C^{\varkappa\beta\rho\sigma}\tau_{/\rho}\tau_{/\beta} \,. \tag{19}$$

Le discontinuità possono dunque individuarsi, nota la funzione τ, ricorrendo ad un unico vettore q_σ soluzione del sistema lineare omogeneo sintetizzato nella (19), con la condizione (9).

Notiamo che le quattro equazioni sintetizzate nella (19) non sono indipendenti, perchè da esse si trae l'identità:

$$H^{\varkappa\sigma}q_\sigma\tau_{/\varkappa} = 2C^{\alpha\beta\rho\sigma}\tau_{/\rho}\tau_{/\beta}\tau_{/\alpha}q_\sigma \equiv 0.$$

Tenendo conto che, per la (9), $q_0 = 0$, le equazioni indipendenti a cui ubbidiscono le rimanenti tre componenti $q_s (s = 1, 2, 3)$ di q_σ sono le seguenti tre lineari e omogenee:

$$H^{as}q_s = 0 \qquad (a,\ s = 1,\ 2,\ 3). \tag{20}$$

Affinchè la (20) ammetta soluzioni non tutte nulle (il che comporterebbe assenza di discontinuità) deve essere $\| H^{as} \| = 0$, ossia la funzione τ deve ubbidire all'equazione:

$$\| C^{a\beta\rho s}\tau_{/\beta}\tau_{/\rho} \| = 0. \tag{21}$$

La (21) è l'equazione differenziale delle varietà caratteristiche.

4. Consideriamo, in particolare, il campo elettromagnetico *nei cristalli* omogenei.

Qui i ventun coefficienti che caratterizzano il mezzo elettromagneticamente si riducono a soli sette: le sei componenti distinte del tensore doppio simmetrico spaziale $\eta_{ik} = \eta_{ki}$ $(i, k = 1, 2, 3)$, che sintetizza le costanti dielettriche, e il coefficiente μ di permeabilità magnetica.

Nel caso in esame si ha:

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_{i0k0} = - C_{0ik0} = - C_{i00k} = C_{0i0k} = -\dfrac{1}{2}\eta_{ik} = -\dfrac{1}{2}\eta_{ki} & \\ & (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \\ C_{ikrs} = \dfrac{a_{ir}a_{ks} - a_{is}a_{kr}}{2\mu} \qquad (i,\ k,\ r,\ s = 1,\ 2,\ 3) & \end{array} \right. \tag{22}$$

e tutte le altre componenti di $C_{\alpha\beta\sigma\rho}$ sono nulle.

Risulta allora:

$$H^{as} = 2C^{\alpha\beta\rho s}\tau_{/\beta}\tau_{/\rho} = \eta^{as}\tau_{/0}\tau_{/0} + \frac{1}{\mu}\left(\tau^{/a}\tau^{/s} - \tau_{/r}\tau^{/r}a^{as}\right) \tag{23}$$

e quindi la (21) si può scrivere così:

$$\| \mu\eta^{as}\tau_{/0}\tau_{/0} - \tau_{/r}\tau^{/r}a^{as} + \tau^{/a}\tau^{/s} \| = 0. \tag{24}$$

La (24) coincide con la nota equazione differenziale dei fronti d'onda omotetici alla superficie di Fresnel, e dalla (24) si traggono le leggi di variazione delle velocità di propagazione nelle varie direzioni ([5]).

5. Rilevo, in fine, che tutte le considerazioni finora svolte sussistono inalterate anche per campi più generali di quello maxwelliano, purchè questi campi più generali siano retti da equazioni che hanno la medesima parte differenziale. È questo il caso dei campi di Yukawa ([6]), o dei campi che ne costituiscono l'estensione, da me considerati attraverso il principio della minima azione generalizzato ([7]).

Sia per i campi di Yukawa che per le loro estensioni il tensore di discontinuità verifica, nel vuoto, la (6) e la (7), e la velocità di propagazione dei fronti d'onda è c; i due tensori di discontinuità verificano invece, in generici mezzi, le (16), e le velocità di propagazione dei fronti d'onda sono quelle stesse che si hanno nei campi maxwelliani e sono date, ad es. nei cristalli, dalla (24).