Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alessandro Terracini

Osservazioni sulle linee principali di alcune classi di superficie dello spazio a cinque dimensioni.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.3, p. 247–252.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_3_247_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Osservazioni sulle linee principali di alcune classi di superficie dello spazio a cinque dimensioni.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino).

Sunto. - *Si esamina una relazione tra la molteplicità di un sistema di linee principali di una superficie dello* S_5 *e l'ordine di approssimazione secondo il quale ha luogo l'incidenza dei piani tangenti in due punti infinitamente vicini di una linea principale del sistema.*

1. Una superficie S dello S_5 (che — così sottintendiamo nel seguito — supponiamo senz'altro non rappresentante nessuna equazione di LAPLACE) possiede, come è notissimo, cinque sistemi di *linee principali* (reali o no, distinti o no): essi divengono indeterminati soltanto se S è la superficie di VERONESE.

Tra i vari modi in cui si possono definire le linee principali ([1]), ci limitiamo a richiamarne uno, col quale si collegano in modo particolare le considerazioni che seguono. Gli ∞^1 piani tangenti ad una superficie S dello S_5 nei punti di una sua linea L costituiscono un sistema nel quale due piani infinitamente vicini sono incidenti in un punto, in un ordine di approssimazione $\sigma \geq 2$ ([2]).

([1]) Cfr. p. e. le citazioni contenute nel n. 1 di A. TERRACINI, *Superficie particolari dello spazio a cinque dimensioni in relazione con le loro linee principali.* « Ann. di Mat. » (4) t. XVII, 1938, pp. 23-44, v. le pp. 23-24.

([2]) Per la nozione dell'ordine di approssimazione nel quale ha luogo l'incidenza di piani infinitamente vicini nello S_5, cfr. A. TERRACINI: *a) Sull' incidenza di spazi infinitamente vicini,* Scritti matematici offerti a LUIGI BERZOLARI, Pavia, 1936, pp. 449-478; *b) La notion d' incidence de*

Se e solo se L è una linea principale, si ha un ordine di approssimazione $\sigma \geq 4$ [3].

Naturalmente, la circostanza che per un sistema di linee principali si abbia un ordine di approssimazione maggiore di quello testè indicato, vale a dire che sia $\sigma \geq 6$, non implica che quel sistema sia necessariamente multiplo. Basta pensare per esempio ad un sistema principale *semplice* costituito da linee piane [4]: tale è per esempio ognuno dei cinque sistemi per la F^5 di DEL PEZZO rappresentata su un piano mediante le cubiche per quattro punti fissi.

Ciononostante, i teoremi che seguono stabiliscono delle relazioni tra la circostanza che per un sistema di linee principali l'ordine di approssimazione considerato sia ≥ 6 e la moltiplicità del sistema stesso.

I. – *Se per una superficie* S *dello* S_5 *un sistema di linee principali è almeno* TRIPLO, *necessariamente entro la totalità* ∞^1 *dei piani tangenti alla* S *nei punti di una linea principale di quel sistema due piani consecutivi sono incidenti in un punto in un ordine di approssimazione* $\sigma \geq 6$.

Invero, adottate coordinate curvilinee u, v in modo che il sistema considerato di linee principali sia quello delle linee u (cioè linee $v =$ cost.), sia

$$(1)\qquad \begin{cases} x_{uuu} = a^{(1)}x + b^{(1)}x_u + c^{(1)}x_v + \alpha x_{uu} + \beta x_{uv} \\ x_{uuv} = a^{(2)}x + b^{(2)}x_u + c^{(2)}x_v + \gamma x_{uu} + \delta x_{uv} + \varepsilon x_{vv} \\ x_{uvv} = a^{(3)}x + b^{(3)}x_u + c^{(3)}x_v + \eta x_{uu} + \lambda x_{uv} + \mu x_{vv} \\ x_{vvv} = a^{(4)}x + b^{(4)}x_u + c^{(4)}x_v + \omega x_{uu} + \nu x_{uv} + \rho x_{vv} \end{cases}$$

il sistema fondamentale di equazioni del terz'ordine rappresentato dalla S.

La condizione affinchè lungo le linee principali u sia $\sigma \geq 6$ è [5]

$$(2)\qquad 3\varepsilon(\beta_u - 2c^{(1)}) - \beta\varepsilon(\alpha + \delta + \mu) - \beta\varepsilon_u = 0\,.$$

plans infiniment voisins, « Colloque de Géométrie différentielle », Louvain 1951, pp. 151-165. Qua basti ricordare che per un sistema ∞^1 di piani dello S_5, di cui ciascuno incidente in un punto al piano infinitamente vicino, σ è suscettibile di tutti i valori pari tali che $2 \leq \sigma \leq 16$; si ha poi $\sigma = \infty$ quando i piani del sistema sono a due a due incidenti in un punto.

(3) Cfr. C. SEGRE, *Sulle linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*, « Rend. Lincei » (5), vol. XXX, 1921.

(4) Per il quale è ovviamente $\sigma = \infty$.

(5) A. TERRACINI, l. c. (1), v. la nota (7) a piè della p. 24. Non è necessario lasciare a parte le linee piane, come in l. c., perchè anche per esse continua a sussistere la (2).

D'altra parte, come è ben noto ([6]), l'equazione differenziale delle linee principali della superficie (1) è

$$Ldu^4dv + Mdu^3dv^2 + Ndu^2dv^3 + Pdudv^4 + \omega dv^5 = 0, \tag{3}$$

dove

$$L = 3\varepsilon - \beta\,; \quad M = \alpha - 3\delta + 3\mu\,; \quad N = \rho - 3\lambda + 3\gamma\,; \quad P = 3\eta - \nu. \tag{4}$$

Perciò, osservando che ([7])

$$c^{(1)} = \varepsilon_u + \varepsilon(\delta + \mu - \alpha) - \beta\mu, \tag{5}$$

e ricavando α, β dalle (4), la (2) assume la forma

$$\varepsilon[-3L_u + 4(\delta - 2\mu)L + 3\varepsilon M + LM] + \varepsilon_u L = 0. \tag{2'}$$

Se $L = M = 0$, la (2′) è soddisfatta, il che dimostra il teorema.

Viceversa, se si suppone soddisfatta la (2′) con $L = 0$, ne segue $M = 0$, oppure $\varepsilon = 0$ e quindi anche $\beta = c^{(1)} = 0$. Nella seconda alternativa le linee u sono piane. Pertanto il teorema I si può invertire col seguente.

II. - *Se per una superficie dello* S_5 *i piani tangenti nei punti delle linee principali di un sistema — supposte non piane — sono tali che l'incidenza di due piani infinitamente vicini ha luogo in un ordine d'approssimazione* $\sigma \geq 6$, *e se quel sistema di linee principali è almeno* DOPPIO, *esso è necessariamente almeno* TRIPLO.

Che il caso delle linee piane costituisca un'effettiva eccezione risulta ovviamente da esempi di superficie possedenti un sistema di linee principali piane (quindi con $\sigma = \infty$), doppio e non più. Tale è p. e. la superficie

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = 1 : u : v : e^u : e^{-v} : \log(1 + e^{u+v}),$$

([6]) Cfr. p. e. BOMPIANI e BORTOLOTTI, *Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese*, « Math. Zeitschrift », Bd. 42, 1937, pp. 411-425, v. p. 419.

([7]) Se si formano le condizioni d'integrabilità del sistema (1), dodici di esse permettono di ricavare le $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) in funzione dei coefficienti delle derivate seconde, restando poi sei condizioni ulteriori che, sostituite per le $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$ le espressioni così ottenute, involgono unicamente quei coefficienti. Cfr. A. TERRACINI: *a*) *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas*, « Unión matemática argentina », Public. n. 16, Buenos Aires, 1940, v. le pp. 12-13; *b*) *Il caso singolare nella determinazione di una superficie di* S_5 *a partire dalle sue linee principali*, « Rendiconti del Seminario matematico dell'Univ. e Polit. di Torino », vol. 11, 1952 (in corso di stampa). La formola (5) è appunto una delle prime dodici condizioni d'integrabilità.

sulla quale le linee principali, manifestamente piane, $u+v=\text{cost.}$ costituiscono appunto un sistema doppio (e non più, esistendo i tre ulteriori sistemi di linee principali $u=\text{cost.}$, $v=\text{cost.}$, e^u+ $+e^{-v}=\text{cost.}$) ([8]).

2. Il risultato contenuto nel teorema I non si può migliorare. Intanto — ove si tratti di linee non piane ([9]) — volendosi ottenere quella tesi, l'ipotesi di un sistema almeno triplo non si può attenuare in quella di un sistema soltanto doppio, come risulta dal teorema II.

Se poi si mantiene l'ipotesi di un sistema almeno triplo, la tesi $\sigma \geq 6$ *è la migliore possibile,* non potendosi da quell'ipotesi inferire che sia necessariamente $\sigma \geq 8$.

Ciò è provato dal seguente esempio, che ci condurrà poi anche ad un'altra conseguenza.

Consideriamo una superficie *W*, vale a dire rappresentante un sistema (1) a coefficienti costanti. Richiamandoci a quanto è detto nella nota ([7]), è da tener presente che le sei ultime condizioni d'integrabilità alle quali ivi si è accennato contengono a fattore, in ogni loro termine, la derivata di qualche coefficiente. Esse sono dunque senz'altro soddisfatte nel caso di una superficie *W*. In altri termini, per il sistema (1) rappresentativo di una superficie *W* si possono assegnare ad arbitrio i coefficienti, costanti, delle derivate seconde, dai quali poi si deducono i rimanenti ([10]) (che risultano parimenti costanti).

Ciò premesso, partiamo da un sistema (1) con

$$\alpha=\delta=\mu=0; \quad \beta=3\varepsilon; \quad \rho=2\gamma+\frac{\lambda}{2}, \tag{6}$$

essendo γ, $\varepsilon (\neq 0)$, η, λ, ω, ν costanti per ora arbitrarie.

In base alle (3), (4) il sistema delle linee principali u è dunque almeno triplo. Individuiamo il piano tangente nel punto x

([8]) A. TERRACINI, *Su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie.* Nota II, » Rend. Lincei » (6), vol. XXV, 1937, pp. 151-158, v. pp. 154-55.

([9]) Come si è ripetutamente avvertito, per un sistema qualunque (dunque anche soltanto semplice) di linee principali piane, si ha addirittura $\sigma=\infty$.

([10]) Quest'ultima osservazione è già contenuta p. e. nella dissertazione di laurea, non pubblicata, presentata nel 1938 all'Università di Torino dalla signorina FULVIA SIGNETTO: *Studio di alcune classi di superficie* W *appartenenti ad uno spazio a cinque dimensioni.*

alla superficie W così ottenuta coi punti x, x_u,

$$y = b^{(1)}x + 3\varepsilon x_v . \tag{7}$$

Attualmente — cfr. p. e. la (5) — si ha $c^{(1)}=0$, cosicchè la prima equazione (1) si riduce alla

$$x_{uuu} = a^{(1)}x + b^{(1)}x_u + 3\varepsilon x_{uv},$$

equivalente per la (7) alla

$$y_u = - a^{(1)}x + x_{uuu} . \tag{8}$$

D' altro lato, mediante derivazione di quella stessa equazione, tenendo conto delle altre equazioni (1) si ottiene

$$x_{uuuuu} = h_0 x + h_1 x_u + h_2 x_{uu} + h_5 y , \tag{9}$$

dove i coefficienti h_0, h_1, h_2, h_5 sono costanti, e precisamente

$$h_2 = a^{(1)} + 9\varepsilon\eta ; \quad h_5 = a^{(1)} + 3\varepsilon c^{(3)} .$$

Per $v = \text{cost.}$ le (8), (9) costituiscono un sistema del tipo che in l. c. ([2]) a) (cfr, il sistema (Σ) di p. 463) ho posto alla base dello studio di un sistema ∞^1 di piani dello S_5, dei quali ciascuno è incidente al consecutivo secondo un ordine d'approssimazione $\sigma \geq 6$. Applicando quanto ivi è detto a p. 465, la condizione affinchè i piani tangenti alla superficie considerata nei punti di una linea u diano luogo ad un ordine d'approssimazione $\sigma \geq 8$ risulta

$$- a^{(1)} = \frac{2h_2 + 9h_5}{7},$$

cioè

$$2a^{(1)} + 2\varepsilon^2\eta + 3\varepsilon c^{(3)} = 0.$$

Attualmente si trova

$$c^{(3)} = \varepsilon(\nu - \eta) ; \quad a^{(1)} = - 2\varepsilon^2(\nu - \eta),$$

cosicchè la condizione in esame diventa $\varepsilon^2(3\eta - \nu) = 0$, vale a dire, avendo supposto $\varepsilon \neq 0$,

$$3\eta - \nu = 0. \tag{10}$$

Basta dunque scegliere le costanti η, ν in modo che non sussista la (10) perchè per il sistema triplo delle linee principali u non sia $\sigma \geq 8$, sia cioè $\sigma = 6$.

L' asserto è così dimostrato.

Anzi, si ottiene così anche un' altra conseguenza. Se si scelgono le costanti γ, λ in modo che sia $\lambda = 2\gamma$ (e quindi attualmente $N = 0$), evitando ancora per η, ν valori soddisfacenti alla (10), si ha un sistema di linee principali addirittura quadruplo, che tuttavia dà luogo ad un ordine di approssimazione $\sigma = 6$.

Perciò *dalla circostanza che un sistema di linee principali sia* QUADRUPLO (anzichè soltanto TRIPLO come nell' enunciato del teorema I) ***non*** *segue che l'ordine di approssimazione secondo il quale ha luogo l'incidenza di piani infinitamente vicini tangenti alla superficie nei punti di una linea principale di quel sistema sia* ≥ 8 ([11]).

Il caso di un sistema QUINTUPLO di linee principali, da questo punto di vista, è esaminato nel n. 3 della mia Nota citata in ([7]) *b*), nella quale si assegnano tutte le superficie dotate di un sistema quintuplo di linee principali.