Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alfred Moessner

Alcuni problemi diofantei elementari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 185–187.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_185_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Alcuni problemi diofantei elementari.

Nota di ALFRED MOESSNER (a Gunzenhausen).

Sunto. - *Si danno le soluzioni di alcuni sistemi diofantei.*

1. Risolviamo in numeri interi il sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \\ A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + B_4^2 \\ A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + A_4^3 = B_1^3 + B_2^3 + B_3^3 + B_4^3 \\ A_1^4 + A_2^4 = B_1^4 + B_2^4 \\ A_1A_4 + A_2A_3 = B_1B_4 + B_2B_3 . \end{cases}$$

Poniamo:

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned} A_1 &= 2a^7 + a^6b + 20a^5b^2 - 17a^4b^3 + 2a^3b^4 - 17a^2b^5 + 8ab^6 + b^7;\\ A_2 &= a^7 - 8a^6b - 17a^5b^2 - 2a^4b^3 - 17a^3b^4 - 20a^2b^5 + ab^6 - 2b^7;\\ B_1 &= a^7 + 8a^6b - 17a^5b^2 + 2a^4b^3 - 17a^3b^4 + 20a^2b^5 + ab^6 + 2b^7;\\ B_2 &= 2a^7 - a^6b + 20a^5b^2 + 17a^4b^3 + 2a^3b^4 + 17a^2b^5 + 8ab^6 - b^7;\end{aligned}\right.$$

poniamo ancora:

$$(2)\qquad S = \frac{A_1^2 + A_2^2 - B_1^2 - B_2^2}{A_1 + A_2 - B_1 - B_2},$$

allora è:

$$(3)\qquad S - A_2 = A_3, \quad S - A_1 = A_4, \quad S - B_2 = B_3, \quad S - B_1 = B_4;$$

in virtù del teorema generale: se

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_z \neq p_1 + p_2 + \ldots + p_z$$

e

$$m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_z^2 \neq p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_z^2$$

ed è ancora:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{z} m_i^2 - \sum_{i=1}^{z} p_i^2}{\sum_{i=1}^{z} m_i - \sum_{i=1}^{z} p_i},$$

allora è:

$$\left\{\begin{aligned} &m_1 + m_2 + \ldots + m_z + (S - m_1) + (S - m_2) + \ldots + (S - m_z) =\\ &\quad = p_1 + p_2 + \ldots + p_z + (S - p_1) + (S - p_2) + \ldots + (S - p_z),\\ &m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_z^2 + (S - m_1)^2 + (S - m_2)^2 + \ldots + (S - m_z)^2 =\\ &\quad = p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_z^2 + (S - p_1)^2 + (S - p_2)^2 + \ldots + (S - p_z)^2,\\ &m_1^3 + m_2^3 + \ldots + m_z^3 + (S - m_1)^3 + (S - m_2)^3 + \ldots + (S - m_z)^3 =\\ &\quad = p_2^3 + p_1^3 + \ldots + p_z^3 + (S - p_1)^3 + (S - p_2)^3 + \ldots + (S - p_z)^3.\end{aligned}\right.$$

Esempio: $a = 1$, $b = 3$ dà $A_1 = 133$, $A_2 = 134$, $B_1 = 59$, $B_2 = 158$,

$$S = \frac{133^2 + 134^2 - 59^2 - 158^2}{133 + 134 - 59 - 158} = 144; \quad A_3 = 144 - 134 = 10;$$

$$A_4 = 144 - 133 = 11; \quad B_3 = 144 - 158 = -14; \quad B_4 = 144 - 59 = 85.$$

2. Risolviamo in numeri interi il sistema

$$\left\{\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= D_1 + D_2 + D_3 + D_4\\ C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 &= D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2\\ C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 + C_4^3 &= D_1^3 + D_2^3 + D_3^3 + D_4^3\\ C_1^3 + C_2^3 &= D_1^3 + D_2^3\\ C_3^3 + C_4^3 &= D_3^3 + D_4^3\\ C_1C_4 + C_2C_3 &= D_1D_4 + D_2D_3\end{aligned}\right.$$

in cui risolviamo $C_1^3 + C_2^3 = D_1^3 + D_2^3$ secondo note formule di WERESBRUSSOV quindi calcoliamo

$$S = \frac{C_1^2 + C_2^2 - D_1^2 - D_2^2}{C_1 + C_2 - D_1 - D_2}$$

e poi determiniamo

$$C_3 = S - C_2, \quad C_4 = S - C_1, \quad D_3 = S - D_2, \quad D_4 = S - D_1 .$$

Se è $C_1^3 + C_2^3 = D_1^3 + D_2^3$ deve anche essere $C_2^3 + C_3^3 = D_2^3 + D_3^3$.

Esempio: $C_1 = 9$, $C_2 = 10$, $D_1 = 1$, $D_2 = 12$, $S = \dfrac{9^2 + 10^2 - 1^2 - 12^2}{9 + 10 - 1 - 12} = 6$

cosicchè $C_3 = 6 - 10 = -4$, $C_4 = 6 - 9 = -3$, $D_3 = 6 - 12 = -6$, $D_4 = 6 - 1 = 5$, . dove $(-4)^3 + (-3)^3 = (-6)^3 + 5^3$; (quindi $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$).

3. Col metodo mostrato in **1.** e **2.** troviamo la seguente identità

$$\left\{\begin{aligned}
&24 + 9 + 361 + 484 + 548 + 671 + 1023 + 1008 = \\
&\quad = 0 + 100 + 225 + 529 + 503 + 807 + 932 + 1032 \\
&24^2 + 9^2 + 361^2 + 484^2 + 548^2 + 671^2 + 1023^2 + 1008^2 = \\
&\quad = 0^2 + 100^2 + 225^2 + 529^2 + 503^2 + 807^2 + 932^2 + 1032^2 \\
&24^3 + 9^3 + 361^3 + 484^3 + 548^3 + 671^3 + 1023^3 + 1008^3 = \\
&\quad = 0^3 + 100^3 + 225^3 + 529^3 + 503^3 + 807^2 + 932^3 + 1032^3 \\
&(*) \begin{cases} 9^3 + 361^3 + 484^3 = 100^3 + 225^3 + 529^3 \\ 9 + 361 + 484 = 100 + 225 + 529 . \end{cases}
\end{aligned}\right.$$

(*) Da ciò segue:

$$\begin{cases} 3^2 + 19^2 + 22^2 = 10^2 + 15^2 + 23^2 \\ 3^6 + 19^6 + 22^6 = 10^6 + 15^6 + 23^6 \end{cases}$$

ed anche

$$\begin{cases} (3^2+19^2)+(3^2+22^2)+(19^2+22^2) = (10^2+15^2)+(10^2+23^2)+(15^2+23^2) \\ (3^2+19^2)(3^2+22^2)(19^2+22^2) = (10^2+15^2)(10^2+23^2)(15^2+23^2). \end{cases}$$