ADRIANO BARLOTTI

Intorno ad una generalizzazione di un noto teorema relativo al triangolo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 182–185.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_182_0>

Intorno ad una generalizzazione di un noto teorema relativo al triangolo.

Nota di Adriano Barlotti (a Firenze).

Sunto. - *Si determinano i quadrangoli e gli esagoni convessi per cui vale una proprietà analoga a quella che è espressa, per i triangoli, dal teorema noto come teorema di Napoleone.*

1. È noto che se è dato un triangolo e si costruiscono sui suoi lati, esternamente al triangolo stesso, tre triangoli equilateri, i centri di questi risultano vertici di un triangolo ancora equilatero. Tale proprietà vale anche se i tre triangoli equilateri si costruiscono su ciascun lato dalla parte del vertice opposto, come pure sussiste se il triangolo degenera in una terna di punti allineati distinti.

Su questo teorema, che viene spesso indicato con il nome di "teorema di Napoleone", è stata in questi ultimi anni richiamata l'attenzione per indicarne suggestive interpretazioni algebriche [1] e per mostrarne la seguente interessante generalizzazione [2]: Se sui lati di un triangolo, esternamente (oppure internamente) ad esso, si costruiscono gli archi capaci degli angoli α, β, γ, scelti in modo che la loro somma sia uguale ad un angolo piatto, i centri di quegli archi risultano vertici di un triangolo i cui angoli sono rispettivamente uguali ad α, β, γ.

2. Se invece di un triangolo si considera un poligono convesso di n vertici e si costruiscono sui suoi lati degli n-agoni regolari i centri di questi non sono in generale i vertici di un n-agono regolare. Nasce allora il problema di determinare a quali particolari condizioni deve soddisfare un n-agono perchè sussista per esso la proprietà ora indicata, dato che essa può verificarsi anche oltre il caso ovvio dell'n-agono regolare.

Nella presente nota viene indicata la soluzione della questione per $n = 4$ ed $n = 6$.

(1) Cfr. L. Brusotti, *Interpretazioni di un teorema di Geometria elementare*, Boll. U. M. I. (3), 1, 1946, pp. 43-47.

(2) Cfr. C. Bonferroni, *Un teorema sul triangolo e il teorema di Napoleone*, Boll. U.M.I. (3), 5, 1950, pp. 85-89; G. Varoli, *Di un teorema sul triangolo*, « Boll. U. M. I. », 5, 1950, pp. 360-363.

3. *La condizione necessaria e sufficiente perchè i centri dei quadrati costruiti sui quattro lati di un quadrangolo, esternamente (oppure internamente) ad esso, siano i vertici di un quadrato è che il quadrangolo dato sia un parallelogrammo.*

Supponiamo dapprima che i quadrati siano costruiti esternamente e cominciamo col mostrare che la condizione è sufficiente. Detti A, B, C, D i vertici del parallelogrammo, si consideri il triangolo ABD, si costruiscano sui lati AB e AD (esternamente al triangolo) gli archi capaci di $\frac{\pi}{4}$ e siano H e K i loro centri (che coincidono evidentemente con i centri dei quadrati di lato AB e AD costruiti esternamente al parallelogrammo) (cfr. fig. 1). Se L è il punto medio di BD, il triangolo HKL, per la generalizzazione ricordata nel n. 1, risulta rettangolo in L e isoscele. Operando analogamente sui triangoli BCA, CDB, DAC si ottengono i triangoli HML, MNL, NKL ciascuno dei quali è rettangolo in L e isoscele. Il quadrilatero $HMNK$ è quindi un quadrato.

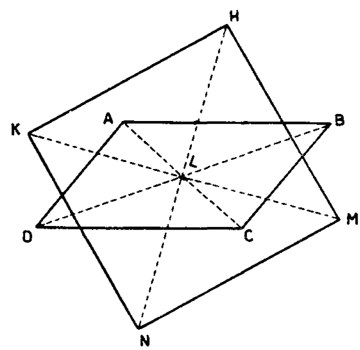

Fig. 1.

La condizione è anche necessaria. Supponiamo che nel quadrangolo $ABCD$ i centri H, M, N, K degli archi capaci dell'angolo di $\frac{\pi}{4}$ costruiti sui suoi lati (esternamente al quadrangolo) costituiscano i vertici di un quadrato. Allora, indicando con L ed L', rispettivamente, i punti medi delle diagonali BD ed AC, il triangolo HLK è rettangolo in L ed isoscele, ed un risultato analogo vale per il triangolo HML'. Poichè ora per ipotesi è $\overline{HK} = \overline{HM}$ e $K\widehat{H}M = \frac{\pi}{2}$, ne segue che L ed L' coincidono e cioè che nel quadrangolo $ABCD$ le diagonali si incontrano scambievolmente nel punto di mezzo: $ABCD$ è perciò un parallelogrammo.

Il teorema richiamato nel n. 1, di cui ci siamo valsi per effettuare la dimostrazione, vale anche se gli archi capaci dell'angolo di $\frac{\pi}{4}$ si costruiscono internamente ai triangoli in cui il quadrangolo $ABCD$ risulta diviso dall'una o dall'altra diagonale. Ripetendo allora un ragionamento analogo a quello ora svolto si trova che il risultato stabilito è vero anche se i quadrati costruiti sui lati sono situati dalla stessa parte del quadrangolo.

Infine si osservi che la proprietà continua a valere anche se il parallelogrammo degenera opportunamente in una quaterna di punti allineati $ABCD$ (con $\overline{AD} = \overline{BC}$).

4. Passiamo al caso $n = 6$. *Perchè in un esagono,* $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, *i centri,* $Q_{12}Q_{23}Q_{34}Q_{45}Q_{56}Q_{61}$, *degli esagoni regolari costruiti sui lati esternamente all'esagono (o dalla stessa parte di esso) siano i vertici di un nuovo esagono regolare occorre e basta che le tre diagonali* P_iP_{i+3} $(i = 1, 2, 3)$ *passino per uno stesso punto,* O, *e che ciascuna di esse sia parallela ai lati* $P_{i+1}P_{i+2}$ *e* $P_{i+4}P_{i+5}$.

Il punto O coincide necessariamente con il centro dell'esagono $Q_{12}Q_{23}Q_{34}Q_{45}Q_{56}Q_{61}$.

5. Premettiamo la seguente osservazione: se è dato un parallelogrammo $ABCD$ e su due suoi lati consecutivi, per esempio AB e BC, si costruiscono (esternamente al parallelogrammo) due triangoli equilateri ABE e BCF, *il triangolo* DEF *risulta equilatero.* Viceversa, se i triangoli equilateri ABE e BCF costruiti (esternamente) su due lati consecutivi del quadrangolo $ABCD$ sono tali che il triangolo EFD è equilatero, ABCD *è un parallelogrammo.*

Per provare la prima parte dell'asserto basta osservare che gli angoli EAD, EBF, DCF sono uguali [3]. Ne segue immediatamente che anche i triangoli EAD, EBF, DCF sono uguali e quindi che il triangolo EDF è equilatero.

Inversamente, supponiamo che i triangoli ABE, BCF e DEF siano equilateri. Questa ipotesi porta che i triangoli EAD, EBF e DCF sono uguali e quindi che nel quadrangolo $ABCD$ risultano uguali i lati opposti: cioè $ABCD$ è un parallelogrammo.

Con identici ragionamenti si prova che la proprietà ora stabilita sussiste anche se i triangoli equilateri ABE e BCF sono costruiti dalla stessa parte di $ABCD$, e se il parallelogrammo degenera in una quaterna di punti allineati $ABCD$ (con $\overline{AD} = \overline{BC}$).

(3) Si osservi che, indicando con α, β, γ, rispettivamente, le misure in radianti degli angoli $\widehat{BAD}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{EBF}$, risulta $\gamma = 2\pi - \frac{2\pi}{3} - \beta = 2\pi - - \frac{2\pi}{3} - (\pi - \alpha) = \alpha + \frac{\pi}{3}$.

6. Torniamo ora alla proprietà enunciata nel n. 4. Nell'ipotesi che le diagonali $P_i P_{i+3}$ $(i=1, 2, 3)$ passino per uno stesso punto, O, e siano parallele ai lati $P_{i+1}P_{i+2}$, il quadrangolo $P_1P_2P_3O$ è un parallelogrammo (cfr. fig. 2) e allora i centri Q_{12} e Q_{23} degli esagoni regolari costruiti (esternamente) sui lati P_1P_2 e P_2P_3 formano con O un triangolo equilatero (cfr. n. 5). Pure equilateri (ed uguali a $Q_{12}Q_{23}O$) sono i triangoli $Q_{23}Q_{34}O$, $Q_{34}Q_{45}O, \ldots$, e quindi l'esagono $Q_{12}Q_{23}Q_{34}Q_{45}Q_{56}Q_{61}$ è regolare.

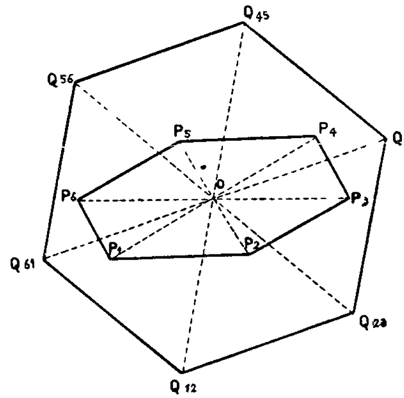

Fig. 2.

La proposizione inversa si prova osservando che, detto O il centro dell'esagono regolare $Q_{12}Q_{23}Q_{34}Q_{45}Q_{56}Q_{61}$, il fatto che i triangoli $Q_{12}Q_{23}O$ e $Q_{23}Q_{34}O$ siano equilateri porta come conseguenza che $P_1P_2P_3O$ e $P_2P_3P_4O$ risultano parallelogrammi, e quindi che la diagonale P_1P_4 passa per O ed è parallela al lato P_2P_3. Considerando successivamente gli altri triangoli $Q_{i,i+1}Q_{i+1,i+2}O$ resta stabilito quanto volevamo provare.

Come già abbiamo accennato la condizione che gli esagoni siano costruiti esternamente non è essenziale. Si può anche supporre che l'esagono degeneri (opportunamente) in 6 punti allineati $P_1P_2P_3$ $P_4P_5P_6$ (con $P_1P_2=P_4P_5$, $P_2P_3=P_5P_6$, $P_3P_4=P_6P_1$).