Letterio Toscano

Su una disuguaglianza relativa ai polinomi di Hermite.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 171–173.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_171_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Su una disuguaglianza relativa ai polinomi di Hermite.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *Si calcola il valore minimo dell'espressione* $H_n^2(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x)$.

1. Sia $H_0(x) = 1$, $H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\left(d^n e^{\frac{-x^2}{2}} / dx^n\right)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, la successione dei polinomi di HERMITE; e con tre consecutivi di essi formiamo il polinomio di grado $2n - 2$

$$\Delta_n(x) = H_n^2(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) . \tag{1}$$

La successione dei polinomi $\Delta_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, come è stato provato, soddisfa la relazione ricorrente

$$\Delta_n(x) = H^2_{n-1}(x) + (n - 1)\Delta_{n-1}(x) , \tag{2}$$

la cui applicazione conduce allo sviluppo [1]

$$\Delta_n(x) = \sum_{0}^{n-1}{}_i\, i\,!\binom{n-1}{i}H^2_{n-i-1}(x) . \tag{3}$$

[1] *The American Mathematical Monthly,* 55 (1948), solution of probl. 4215, pp. 34-35.

Ciò prova che il polinomio $\Delta_n(x)$ è definito positivo su tutto l'asse reale, e che si può esprimere come combinazione a coefficienti positivi di quadrati di polinomi di HERMITE.

2. Dalle (1) e (2) si hanno per derivazione le

$$\Delta_n'(x) = (n-1)[H_n(x)H_{n-1}(x) - H_{n+1}(x)H_{n-2}(x)] \tag{4}$$

$$\Delta_n'(x) = (n-1)[2xH^2_{n-2}(x) + (n-2)\Delta'_{n-2}(x)]\,. \tag{5}$$

Infatti dalla (1) segue

$$\begin{aligned}\Delta_n'(x) &= 2nH_n(x)H_{n-1}(x) - (n+1)H_n(x)H_{n-1}(x) - (n-1)H_{n+1}(x)H_{n-2}(x) = \\ &= (n-1)[H_n(x)H_{n-1}(x) - H_{n+1}(x)H_{n-2}(x)]\,;\end{aligned}$$

e dalla (2)

$$\begin{aligned}\Delta_n'(x) &= (n-1)[2H_{n-1}(x)H_{n-2}(x) + \Delta'_{n-1}(x)] = \\ &= (n-1)[2H_{n-1}(x)H_{n-2}(x) + 2(n-2)H_{n-2}(x)H_{n-3}(x) + (n-2)\Delta'_{n-2}(x)] = \\ &= (n-1)\{2H_{n-2}(x)[H_{n-1}(x) + (n-2)H_{n-3}(x)] + (n-2)\Delta'_{n-2}(x)\} = \\ &= (n-1)[2xH^2_{n-2}(x) + (n-2)\Delta'_{n-2}(x)]\,.\end{aligned}$$

La (5) per successiva applicazione conduce allo sviluppo

$$\Delta'_n(x) = (2x)\sum_{0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}{}_i\,(2i+1)!\binom{n-1}{2i+1}H^2_{n-2i-2}(x)\,, \tag{6}$$

per cui il polinomio

$$\Delta'_n(x)/2x = (n-1)[H_n(x)H_{n-1}(x) - H_{n+1}(x)H_{n-2}(x)]/2x$$

risulta definito positivo su tutto l'asse reale, mentre l'equazione $\Delta'_n(x) = 0$ non ha altra radice reale che lo zero.

3. Ora per n pari si ha

$$\Delta_n''(0) = 2\sum_{0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}{}_i\,(2i+1)!\binom{n-1}{2i+1}H^2_{n-2i-2}(0) > 0\,.$$

E per n dispari è $\Delta_n''(0) = 0$, $\Delta_n'''(0) = 0$,

$$\Delta_n^{(\mathrm{IV})}(0) = (n-1)(n-2)[12(n-2)H^2_{n-3}(0) + \Delta_{n-2}^{(\mathrm{IV})}(0)]\,,$$

da cui segue $\Delta_n^{(\mathrm{IV})}(0) > 0$.

Si conclude allora che per $x = 0$ il polinomio $\Delta_n(x)$ ammette minimo, e si ha

$$\Delta_n(x) \geq \Delta_n(0)\,, \tag{7}$$

e meglio

$$\Delta_n(x) \geq \frac{1}{2^n}\left[\frac{n\,!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\right]^2 \qquad \text{per } n \text{ pari}$$

$$\Delta_n(x) \geq \frac{(n-1)\,!\,(n+1)\,!}{2^n\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!} \qquad \text{per } n \text{ dispari.}$$

4. In queste, sostituendo a x una radice $x_{n-1,\,\nu}$ dell'equazione $H_{n-1}(x) = 0$ si hanno disuguaglianze che si riferiscono ad $H_n^2(x_{n-1,\,\nu})$, e quindi ai massimi e minimi di $H_n(x)$.