BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UGO BARBUTI

Sopra un caso di “risonanza” per la
equazione $x'' + B(t)x = 0$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.
7 (1952), n.2, p. 154–159.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_154_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sopra un caso di “ risonanza „ per la equazione $x'' + B(t)x = 0$.

Nota di UGO BARBUTI (a Pisa).

Sunto. - *Si prova un teorema di non stabilità per la equazione $x'' + B(t)x = 0$ nelle ipotesi $B(t) \rightarrow b^2$ per $t \rightarrow +\infty$.*

Supponiamo $B(t)$ tendente ad un limite positivo b^2 per $t \rightarrow +\infty$.
In queste ipotesi, posto :

(1)
$$B(t) = b^2 + C(t),$$

(⁸) Si veda: FUBINI e ČECH, op. cit. in (¹), p. 86.

si conoscono criteri di stabilità ⁽¹⁾ per la equazione :

$$(2) \quad x'' + (b^2 + C(t))x = 0.$$

Si sa ad esempio : che gli integrali della (2) sono stabili se $C(t)$ è assolutamente integrabile in $(t^0, +\infty)$ ⁽²⁾; oppure se $C(t)$ è a variazione limitata nel medesimo intervallo.

Mettendo in luce un particolare aspetto del problema di stabilità per la equazione (2), questi criteri possono enunciarsi affermando che l'aggiunta di un termine $C(t)$ (infinitesimo per $t \rightarrow +\infty$ e godente delle proprietà suddette) alla costante b^2 nella equazione dei moti armonici :

$$(3) \quad x'' + b^2x = 0$$

conserva per la (2) il carattere asintotico di stabilità degli integrali della (3).

Si osservi che in queste proposizioni il valore della costante b sembra non avere alcun peso ed alcun significato, in relazione al termine $C(t)$, al fine di conservare la stabilità. Ciò però non è in generale vero: Infatti nella equazione

$$(C_r) \quad x'' + \left(b^2 + \frac{\text{sen } 2bt}{t} \right) x = 0,$$

nella quale $\text{sen } 2bt/t$ è ancora un termine infinitesimo per $t \rightarrow +\infty$, non si ha stabilità ⁽³⁾, come ha mostrato recentemente G. ASCOLI ⁽⁴⁾ [2]; mentre sono stabili gli integrali dell'altra :

$$(C_s) \quad x'' + \left(b^2 + \frac{\text{sen } at}{t} \right) x = 0$$

$$(|a| \neq 2|b|).$$

Nel caso (C_r) la presenza del fattore periodico $\text{sen } 2bt$ in $C(t)$, il cui periodo è legato al periodo degli integrali della (3) da ovvia relazione, produce per gli integrali della (2) una specie di feno-

(1) I numeri in parentesi quadra indicano la bibliografia che si trova in fondo alla nota. Per questioni attinenti a questo lavoro e una notevole bibliografia vedere ad es. [1].

(2) La ipotesi che $C(t)$ sia infinitesima per $t \rightarrow +\infty$ è per verità superflua in questo criterio (Cfr. ad es. [1], p. 32).

(3) Che la tendenza a zero del termine $C(t)$ non è sufficiente a garantire la stabilità per la (2) è noto dal 1930. Esempi in proposito sono stati prodotti da R. CACCIOPOLI ed O. PERRON.

(4) In [2] G. ASCOLI ha studiato la equazione $X'' + \left(1 + k \frac{\text{sen } 2\tau}{\tau} \right) X = 0$ (k cost. arb.) alla quale si riduce la (C_r) colla posizione $bt = \tau$.

meno di « risonanza » con quelli della (3), per modo che il carattere asintotico degli integrali della (3) non viene più conservato in (2) con l'aggiunta del termine $\frac{\text{sen } 2bt}{t}$.

Ora mentre la stabilità nel caso (C_s) e in casi analoghi potrà ottenersi con nuovi criteri, quando i noti falliscono, (si vedano le recenti note di G. PRODI [3] ed anche la mia nota [4]) non si conoscono, ci sembra, proposizioni che prevedano casi di non stabilità come avviene in (C_r). Non sembra perciò privo di interesse di ricercarne qualcuna, non solo al fine di approfondire il meccanismo del fatto, ma anche in vista di future indagini sul problema della stabilità.

In questa nota ci proponiamo, perciò, di indicare un procedimento che conduce ad un criterio di non stabilità, che fornisce quindi casi come il (C_s) nei quali il fenomeno osservato ha luogo.

È opportuno avvertire anche che criteri diversi da quello qui presentato, potranno ottenersi col medesimo procedimento, e che il metodo usato è stato sostanzialmente adoperato in [4].

1. Ci sarà utile ancora (Cfr. [4], il seguente noto teorema:
Gli integrali della equazione:

$$(2'') \quad x'' + B(t)x = 0$$

sono tutti limitati per $t \rightarrow +\infty$ se lo sono quelli della

$$(2') \quad x'' + A(t)x = 0$$

e se $A(t) = B(t) + \lambda(t)$ on $\lambda(t)$ assolutamente integrabile in $(t^0, +\infty)$.

Per la legge delle inverse si ricava subito che se la (2'') non ha tutti i suoi integrali limitati ciò accade anche per la (2'),

2. Il caso (C_r) induce ad assumere nella (2) il termine $C(t)$ della forma

$$C(t) = 2\omega(t) \text{sen } v(t) \cos v(t)$$

e proponiamoci di studiare più in generale il comportamento degli integrali della equazione

$$(4) \quad x'' + (v'^2(t) + 2\omega(t) \text{sen } v(t) \cos v(t))x = 0.$$

Giova preliminarmente determinare delle funzioni $A(t)$ tali che l'equazione (2'') ammetta integrali rispettivamente della forma (Cfr. [4])

$$(5) \quad x_1(t) = R \text{sen } v, \quad x_2(t) = T \cos v$$

con R, T, v funzioni di t aventi derivate fino all'ordine che esigeranno le formule seguenti ed R, T, v' mai nulle. Imponendo

appunto alle (5) di soddisfare la (2''), si trova, indicando con $A_1(t)$, $A_2(t)$, le forme assunte da $A(t)$, rispettivamente :

$$(6) \quad \begin{cases} A_1 \operatorname{sen} v = \left(-\frac{R''}{R} + v'^2 \right) \operatorname{sen} v - \left(2\frac{R'}{R} v' + v'' \right) \cos v \\ A_2 \cos v = \left(-\frac{T''}{T} + v'^2 \right) \cos v + \left(2\frac{T'}{T} v' + v'' \right) \operatorname{sen} v. \end{cases}$$

Imponiamo ora alle R , T di soddisfare rispettivamente le equazioni :

$$(7) \quad \begin{cases} -\left(2\frac{R'}{R} v' + v'' \right) \cos v = \omega \operatorname{sen}^2 v \cos v \\ \left(2\frac{T'}{T} v' + v'' \right) \operatorname{sen} v = \omega \operatorname{sen} v \cos^2 v ; \end{cases}$$

per questo basterà assumere, come facilmente può verificarsi integrando le precedenti, per funzioni non nulle R , T , le seguenti :

$$(8) \quad \begin{cases} R(t) = v'^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} a_s(t)} ; & \left(a_s(t) = \int_{t_0}^t \frac{\omega(\tau) \operatorname{sen}^2 v(\tau)}{v'(\tau)} d\tau \right) \text{ (5)} \\ T(t) = v'^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} a_c(t)} ; & \left(a_c(t) = \int_{t_0}^t \frac{\omega(\tau) \cos^2 v(\tau)}{v'(\tau)} d\tau \right). \end{cases}$$

Con queste funzioni, per le (6), le $A_1(t)$, $A_2(t)$ assumono le forme :

$$(6') \quad \begin{cases} A_1(t) = -\frac{R''}{R} + v'^2 + \omega \operatorname{sen} v \cos v \\ A_2(t) = -\frac{T''}{T} + v'^2 + \omega \operatorname{sen} v \cos v. \end{cases}$$

Se ora calcoliamo le espressioni di $-\frac{R''}{R}$, $-\frac{T''}{T}$ che figurano nelle precedenti esprimendole per le (8), si trova :

$$(9) \quad \begin{cases} -\frac{R''}{R} = \lambda_1(t) + \omega \operatorname{sen} v \cos v \\ -\frac{T''}{T} = \lambda_2(t) + \omega \operatorname{sen} v \cos v \end{cases}$$

(5) In queste (8) $v'(t)$ viene supposta positiva, ipotesi legittima, come risulta dalla forma assunta per $C(t)$.

dove è

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(t) = -v'^{-2}v''\left(\frac{3}{4}v'' + \omega \operatorname{sen}^2 v\right) + \frac{1}{2}(v''' + \omega' \operatorname{sen}^2 v)v'^{-1} - \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{4}v'^{-2}\omega^2 \operatorname{sen}^4 v \\ \lambda_2(t) = -v'^{-2}v''\left(\frac{3}{4}v'' - \omega \operatorname{cos}^2 v\right) + \frac{1}{2}(v''' - \omega' \operatorname{cos}^2 v)v'^{-1} - \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{4}v'^{-2}\omega^2 \operatorname{cos}^4 v. \end{array} \right.$$

Le (6') si possono allora scrivere :

$$(6'') \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1(t) = v'^2(t) + 2\omega(t) \operatorname{sen} v(t) \operatorname{cos} v(t) + \lambda_1(t) \\ A_2(t) = v'^2(t) + 2\omega(t) \operatorname{sen} v(t) \operatorname{cos} v(t) + \lambda_2(t). \end{array} \right.$$

Osserviamo allora che ogni gruppo di condizioni imposte alle $\omega(t)$, $v(t)$, atte ad assicurare l'assoluta integrabilità in $(t^0, +\infty)$ delle funzioni $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ definite dalle (10) porta ad un teorema di non stabilità per la (4) se una almeno delle funzioni $R(t)$, $T(t)$ definite dalle (8) è non limitata per $t \rightarrow +\infty$.

Infatti se le $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ sono assolutamente integrabili, una delle equazioni che si ottengono dalla (2'') sostituendo ad $A(t)$ le (6'') non ha tutti i suoi integrali limitati, la stessa cosa accade (Cfr. n. 1) per gli integrali della (4).

3. Condizioni del tipo detto nella osservazione precedente risultano essere, ad esempio, quelle precisate nel seguente criterio di non stabilità.

TEOREMA. - *Le $v(t)$, $\omega(t)$ soddisfino le seguenti condizioni :*

i) *Sia $v(t)$ della forma*

$$v(t) = bt + q(t)$$

dove b è una costante positiva, $q(t)$ definita in $(t^0, +\infty)$, possiede derivate dei primi tre ordini. continue, delle quali $q'(t)$ infinitesima per $t \rightarrow +\infty$ e $q''(t)$, $q'''(t)$, assolutamente integrabili in $(t^0, +\infty)$.

ii) *Sia $\omega(t)$ una funzione definita in $(t^0, +\infty)$, non negativa (oppure non positiva), a quadrato integrabile, e avente derivata, continua, assolutamente integrabile nel medesimo intervallo.*

iii) Si abbia :

$$\int_{t_0}^{+\infty} \omega(t) \operatorname{sen}^2 v(t) dt = \pm \infty, \quad \int_{t_0}^{+\infty} \omega(t) \cos^2 v(t) dt = \pm \infty \quad (6)$$

cioè gli integrali al primo membro siano infiniti e determinati di segno.

In queste condizioni gli integrali delle (4) non sono tutti limitati per $t \rightarrow +\infty$.

In queste condizioni, infatti, l'assoluta integrabilità delle $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ segue subito dalle (10) e dalle ipotesi ammesse.

Inoltre una almeno delle funzioni $R(t)$, $T(t)$ definite dalle (8) non riesce limitata. Si ha infatti, se ad esempio $\omega(t) \geq 0$, che è possibile trovare un t' ed un b' , $0 < b' < b$, opportuni, tali che se è $t > t'$ è anche $v'(t) > b'$; onde avremo :

$$\int_{t'}^t \frac{\omega(\tau) \cos^2 v(\tau)}{v'(\tau)} d\tau > \frac{1}{b'} \int_{t'}^t \omega(\tau) \cos^2 v(\tau) d\tau$$

e perciò $T(t)$ non è limitata per $t \rightarrow +\infty$. Analogamente si ragiona se $\omega(t) \leq 0$.

Le condizioni del teorema precedente sono verificate nell'esempio seguente :

$$x'' + \left(b^2 + \frac{\operatorname{sen} 2bt}{t^\alpha} \right) x = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \right).$$

Nel caso $\alpha = 1$ si ottiene l'esempio (C_r) considerato in principio.

(6) Si osservi che queste condizioni implicano che $\int_{t_0}^{+\infty} \omega(t) dt = \pm \infty$.

ELENCO DEI LAVORI CITATI

1. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, II, (Zanichelli, Bologna, 1949, 2^a ed.), pp. 25-38.
2. G. ASCOLI, *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità*, « Rend. Acc. Lincei », Ser. VIII, Vol. 9, (1950), pp. 210-13, (Nota II).
3. G. PRODI, *Nuovi criteri di stabilità ...*, « Rend. Acc. Lincei », Ser. VIII, Vol. X, (1951), pp. 447-51, (Nota I), e, pp. 30-34, Vol. XI, (Nota II).
4. U. BARBUTI, *Sulla stabilità ...*, « Rend. Acc. Lincei », Ser. VIII, Vol. 12, (1952), pp. 170-75.