

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GUIDO VAONA

**Sulle trasformazioni puntuali fra piani  
aventi due reti asintotiche di curve  
caratteristiche corrispondenti.**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.  
7 (1952), n.2, p. 148–154.*

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1952\\_3\\_7\\_2\\_148\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_148_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Sulle trasformazioni puntuali  
fra piani aventi due reti asintotiche di curve caratteristiche  
corrispondenti.**

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna).

**Sunto.** - *Si studiano le trasformazioni puntuali fra due piani che posseggono due reti asintotiche corrispondenti di curve caratteristiche.*

1. Una trasformazione puntuale fra due piani determina in ciascuno di essi un tritessuto di curve (le curve caratteristiche). Nel presente lavoro vengono studiate le trasformazioni fra piani per cui due reti corrispondenti di curve caratteristiche sono due reti asintotiche <sup>(1)</sup>. Si perviene al risultato:

*Le trasformazioni puntuali fra piani per le quali due reti di curve caratteristiche corrispondenti sono due reti asintotiche, sono tutte e sole quelle che si ottengono proiettando da due punti fissi coppie di punti corrispondenti di due superficie non sviluppabili proiettivamente applicabili (in particolare omografiche).*

<sup>(1)</sup> Per la nozione di rete piana asintotica si veda ad es.: FUBINI e CECCH, *Géométrie projective différentielle des surfaces*, Gauthier-Villars, Paris (1931), p. 150.

Nella ricerca ci si vale della rappresentazione della trasformazione mediante due sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali lineari omogenee del 2° ordine (2).

L'esame delle condizioni di integrabilità di tali sistemi porta a classificare le trasformazioni in tre tipi, cui corrispondono i vari tipi di applicabilità:

I. Trasformazioni ottenute proiettando due *superficie omografiche*;

II. Trasformazioni ottenute proiettando due *superficie applicabili del tipo  $R_0$* ;

III. Trasformazioni ottenute proiettando due *superficie applicabili del tipo R*.

2. Fra due piani proiettivi  $\pi(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\bar{\pi}(y_1, y_2, y_3)$  consideriamo la trasformazione puntuale di equazioni

$$x_i = x_i(u, v), \quad y_i = y_i(u, v) \quad (i = 1, 2, 3),$$

dove le  $x_i(u, v)$ ,  $y_i(u, v)$  sono integrali rispettivamente dei due sistemi di equazioni differenziali completamente integrabili del tipo

$$\begin{aligned} x^{uu} &= (\theta^u - b)x^u + \beta x^v + px & y^{uu} &= (\theta_1^u - b_1)y^u + \beta y^v + p_1 y \\ (1) \quad x^{uv} &= ax^u + bx^v + cx & (1') \quad y^{uv} &= a_1 y^u + b_1 y^v + c_1 y \\ x^{vv} &= \gamma x^u + (\theta^v - a)x^v + qx & y^{vv} &= \gamma y^u + (\theta_1^v - a_1)y^v + q_1 y. \end{aligned}$$

Ciò è sempre possibile quando si scelgano i parametri  $u$  e  $v$  in modo che le curve  $u = \text{cost.}$ ,  $v = \text{cost.}$  siano caratteristiche.

Supponiamo che la rete  $u = \text{cost.}$ ,  $v = \text{cost.}$  di  $\pi$  e la corrispondente di  $\bar{\pi}$  siano due reti asintotiche. È allora possibile scegliere intrinsecamente i fattori di proporzionalità in  $\pi$  e  $\bar{\pi}$  in guisa che si abbia  $a = b = 0$ ,  $a_1 = b_1 = 0$  (2). I sistemi (1), (1') diventano

$$\begin{aligned} x^{uu} &= \theta^u x^u + \beta x^v + px & y^{uu} &= \theta_1 y^{uu} + \beta y^v + p_1 y \\ (2) \quad x^{uv} &= cx & (2') \quad y^{uv} &= c_1 y \\ x^{vv} &= \gamma x^u + \theta^v x^v + qx & y^{vv} &= \gamma y^u + \theta_1^v y^v + q_1 y. \end{aligned}$$

Alcune delle condizioni di integrabilità dei sistemi (2), (2') determinano  $c$ ,  $p$ ,  $q$  e  $c_1$ ,  $p_1$ ,  $q_1$  in funzione di  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$  e  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\theta_1$

(2) Si veda: M. VILLA, *Per una geometria proiettiva differenziale in grande delle trasformazioni puntuali*, « Atti del IV Congresso U. M. I. (1951) ».

(3) Si veda: FUBINI e ČECH, op. cit. in (1), p. 155.

rispettivamente. Si ha cioè

$$\begin{aligned} c &= \theta^{uv} + \beta\gamma & c_1 &= \theta_1^{uv} + \beta\gamma \\ a &= -\beta^v - \beta\theta^v & p_1 &= -\beta^v - \beta\theta_1^v \\ q &= -\gamma^u - \gamma\theta^u & q_1 &= -\gamma^u - \gamma\theta_1^u. \end{aligned}$$

Le rimanenti condizioni di integrabilità dei due sistemi si possono scrivere nella forma

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left[ \theta^{uu} - \frac{1}{2} (\theta^u)^2 + \beta\theta^v + \beta^v \right] + 2\beta\gamma^u + \gamma\beta^u = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ \theta^{vv} - \frac{1}{2} (\theta^v)^2 + \gamma\theta^v + \gamma^u \right] + 2\gamma\beta^v + \beta\gamma^v = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left[ \theta_1^{uu} - \frac{1}{2} (\theta_1^u)^2 + \beta\theta_1^v + \beta^v \right] + 2\beta\gamma^u + \gamma\beta^u = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ \theta_1^{vv} + \frac{1}{2} (\theta_1^v)^2 + \gamma\theta_1^v + \gamma^u \right] + 2\gamma\beta^v + \beta\gamma^u = 0.$$

Lo studio delle trasformazioni in esame si riduce, dal punto di vista analitico, allo studio dei sistemi (3), (4), poichè dalla natura delle soluzioni  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\theta_1$  (se esistono) dipendono la natura e le proprietà dei sistemi (2), (2') e quindi delle corrispondenti trasformazioni.

Nei numeri successivi esamineremo più a fondo i sistemi (3), (4).

**3.** Ma a prescindere per ora da tale studio, possiamo stabilire un risultato fondamentale che risponde ad un tempo alla questione esistenziale e costruttiva delle trasformazioni in esame. Si ha:

*Le trasformazioni puntuali fra piani per le quali due reti di curve caratteristiche corrispondenti sono due reti asintotiche, sono tutte sole quelle che si ottengono proiettando da due punti fissi coppie di punti corrispondenti di due superficie non sviluppabili proiettivamente applicabili (in particolare omografiche).*

È ben noto <sup>(4)</sup> che ogni rete piana asintotica può ottenersi in infiniti modi proiettando la rete delle asintotiche di una superficie non sviluppabile dello spazio ordinario da un punto su quel piano. Se supponiamo che il piano  $\pi(x_1, x_2, x_3)$  sia il piano  $x_4 = 0$  di uno spazio ordinario  $S(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , la rete (2) è la proiezione dal punto  $(0, 0, 0, 1)$  della superficie di equazioni  $x_i = z_i(u, v)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ), dove le  $z_i$  sono soluzioni del sistema completamente integrabile

$$(5) \quad \begin{aligned} z^{uu} &= \theta^u z^u + \beta z^v + p z \\ z^{vv} &= \gamma z^u + \theta^v z^v + q z \\ z^{uv} &= cz + k e^{\theta} y \end{aligned} \quad (k = \text{cost}, \quad y_1 = y_2 = y_3 = 0, \quad y_4 = 1).$$

(4) Si veda: FUBINI e ČECH, op. cit. in (1), p. 151.

Così la rete (2') è la proiezione delle asintotiche della superficie dello spazio  $\bar{S}(y_1, y_2, y_4)$ , rappresentata dal sistema

$$(5') \quad \begin{aligned} \bar{z}^{uu} &= \bar{\alpha}_1^u \bar{z} + \bar{\beta} z^v + p_1 \bar{z} \\ \bar{z}^{vv} &= \gamma \bar{z}^u + \bar{\alpha}_1^v \bar{z}^v + q_1 \bar{z} \\ \bar{z}^{uv} &= c_1 \bar{z} + h e^{\theta} \bar{y} \end{aligned} \quad (h = \text{cost}, \bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \bar{y}_3 = 0, \bar{y}_4 = 1),$$

dal punto  $(0, 0, 0, 1)$  sul piano  $\bar{\pi} \ y_4 = 0$ .

Fra le due superficie (5), (5') intercede una corrispondenza che associa coppie di punti ottenuti per gli stessi valori di  $u$  e  $v$ . La trasformazione fra  $\pi$  e  $\bar{\pi}$  può pensarsi ottenuta proiettando dai due punti  $(0, 0, 0, 1)$  di  $S, \bar{S}$  coppie di punti corrispondenti delle due superficie. Inoltre la corrispondenza fra le due superficie è una applicabilità proiettiva, poichè gli elementi lineari proiettivi delle due superficie coincidono essendo dati dalla (5)

$$\frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{2dudv}.$$

Inversamente siano date due superficie applicabili  $F, \bar{F}$  e consideriamo la corrispondenza fra due piani  $\pi, \bar{\pi}$  ottenuta proiettando da due punti fissi  $A, \bar{A}$  coppie di punti di  $F, \bar{F}$  corrispondenti nella data applicabilità. Siano  $Q, \bar{Q}$  due punti corrispondenti di  $F, \bar{F}$  e  $P, \bar{P}$  le relative proiezioni su  $\pi, \bar{\pi}$ . Se  $a$  è una retta per  $P$  proiezione di una tangente asintotica di  $F$  per  $Q$ , essa è direzione caratteristica. Infatti ad  $a$  corrisponde su  $\bar{F}$  la sezione piana fatta col piano  $(A, a)$  che ha in  $Q$  un flesso. La curva ad essa corrispondente nell'applicabilità ha un flesso in  $\bar{Q}$  (6) e pertanto la curva proiezione da  $\bar{A}$  su  $\bar{\pi}$  ha un flesso in  $\bar{P}$ . La trasformazione fra  $\pi, \bar{\pi}$  ha due reti di curve caratteristiche che sono asintotiche. Esse sono le reti proiezioni delle due reti asintotiche di  $F, \bar{F}$ .

4. Vediamo ora di approfondire lo studio dei sistemi di equazioni differenziali (3), (4). Sottraendo membro a membro le (3), (4) ed indicando con  $\tau(u, v)$  la funzione  $\theta_1 - \theta$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} [2\tau^{uu} + 2\beta\tau^v - (\tau^v)^2 - 2\tau^u\theta^u] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} [2\tau^{vv} + 2\gamma\tau^u - (\tau^u)^2 - 2\tau^v\theta^v] &= 0. \end{aligned}$$

(5) Si veda: FUBINI e ČECH, op. cit. in (1), pp. 79 e seguenti.

(6) Si veda: FUBINI e ČECH, op. cit. in (1), p. 88.

Integrando si ha dunque

$$(6) \quad \begin{aligned} 2\tau^{uu} + 2\beta\tau^v - (\tau^u)^2 - 2\tau^u\theta^u &= f(u) \\ 2\tau^{vv} + 2\gamma\tau^u - (\tau^v)^2 - 2\tau^v\theta^v &= \varphi(v). \end{aligned}$$

Si possono distinguere tre casi:

- I)  $f(u) = \varphi(v) = 0$ ;  
 II)  $f(u) \neq 0$ ,  $\varphi(v) = 0$ ; oppure  $f(u) = 0$ ,  $\varphi(v) \neq 0$ ;  
 III)  $f(u) \neq 0$ ,  $\varphi(v) \neq 0$ .

Proveremo nei numeri successivi che a questi tre casi corrispondono rispettivamente i seguenti tipi di trasformazioni:

I) *Trasformazioni ottenute proiettando due superficie omografiche*;

II) *Trasformazioni ottenute proiettando due superficie applicabili del tipo  $R_0$* ;

III) *Trasformazioni ottenute proiettando due superficie applicabili del tipo  $R$* .

5. Supponiamo che sia  $f(u) = \varphi(v) = 0$ . Per dimostrare che in tali ipotesi le due superficie  $F$ ,  $F'$  di equazioni (5), (5') sono omografiche, faremo vedere che il sistema

$$(7) \quad \begin{aligned} \bar{z}^{uu} &= \theta_1^u \bar{z}^u + \beta \bar{z}^v + p_1 \bar{z} \\ \bar{z}^{vv} &= \gamma \bar{z}^u + \theta_1^v \bar{z}^v + q_1 \bar{z} \end{aligned}$$

del quale la  $\bar{F}$  è integrale, mediante una trasformazione del tipo  $\bar{z} = \rho z'$  può farsi coincidere col sistema

$$(8) \quad \begin{aligned} z^{uu} &= \theta^u z^u + \beta z^v + pz \\ z^{vv} &= \gamma z^u + \theta^v z^v + qz, \end{aligned}$$

del quale la  $F$  è integrale. Per effetto della trasformazione indicata, tenendo presenti le espressioni di  $p$ ,  $q$  e  $p_1$ ,  $q_1$ , il sistema (7) diventa

$$(7') \quad \begin{aligned} z'^{uu} &= \left( \theta_1^u - \frac{2\rho^u}{\rho} \right) z'^u + \beta z'^v + \left( -\beta^v - \beta\theta_1^v + \theta_1^u \frac{\rho^u}{\rho} + \beta \frac{\rho^v}{\rho} - \frac{\rho^{uu}}{\rho} \right) z' \\ z'^{vv} &= \gamma z'^u + \left( \theta_1^v - \frac{2\rho^v}{\rho} \right) z'^v + \left( -\gamma^u - \gamma\theta_1^u + \theta_1^v \frac{\rho^v}{\rho} + \gamma \frac{\rho^u}{\rho} - \frac{\rho^{vv}}{\rho} \right) z'. \end{aligned}$$

Si verifica, avendo riguardo alle (6), che basta scegliere

$$\rho = me^{\frac{\tau}{2}} \quad (m = \text{cost})$$

perchè il sistema (7') coincida col sistema (8).

Per queste trasformazioni si ha che *i due sistemi residui di curve caratteristiche sono due fasci di rette in corrispondenza proiettiva.*

Siano  $B, \bar{B}$  rispettivamente i punti di  $S, \bar{S}$  corrispondenti di  $\bar{A}, A$  nell'omografia nella quale si corrispondono  $F, \bar{F}$ . Alle sezioni piane di  $F$  fatte coi piani del fascio  $AB$ , corrispondono le sezioni piane di  $\bar{F}$  fatte coi piani del fascio  $\bar{A}\bar{B}$ . I due fasci di rette sezione di questi due fasci di piani con  $\pi, \bar{\pi}$  sono corrispondenti nella trasformazione fra piani e la corrispondenza subordinata fra i fasci è proiettiva.

Osservo infine che questa proprietà è caratteristica per queste trasformazioni in quanto è d'altra parte noto che:

*Se una trasformazione fra due piani muta proiettivamente un fascio di rette in un fascio di rette, essa si può ottenere proiettando due superficie omografiche (7).*

6. Supponiamo ora che sia  $f(u) \neq 0, \varphi(v) = 0$  (analoghi risultati si ottengono se  $f(u) = 0$  e  $\varphi(v) \neq 0$  col solo scambio di  $u$  con  $v$ ).

Si può dimostrare che con un opportuno cambiamento dei parametri sulle curve  $v = \text{cost}$  è sempre possibile far in modo che sia  $f(u) = 1$ . Il cambiamento che si deve eseguire è del tipo

$$\bar{u} = \bar{u}(u), \quad \bar{v} = v, \quad \text{con} \quad \left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{u}}\right)^2 = f(u).$$

Le condizioni (6) si scrivono pertanto nel caso attuale

$$(9) \quad \begin{aligned} 2\tau^{uu} + 2\beta\tau^v - (\tau^u)^2 - 2\tau^u\theta^u &= 1 \\ 2\tau^{vv} + 2\gamma\tau^v - (\tau^v)^2 - 2\tau^v\theta^v &= 0. \end{aligned}$$

Deriviamo due volte le (9) ed uguagliamo il valore della  $\tau^{uvv}$ , ottenuta derivando due volte la 1<sup>a</sup> rispetto a  $v$ , al valore della  $\tau^{vuu}$ , ottenuta derivando due volte la 2<sup>a</sup> rispetto ad  $u$ . Sostituendo alle derivate 2<sup>o</sup> e 3<sup>o</sup> della  $\tau$  i loro valori dedotti dalle (9) si ha

$$\begin{aligned} \tau^u(\theta^{uvv} - \theta^v\theta^{uv} + \gamma^u\theta^u + \gamma\theta^{uu} + \gamma^{uu} + 2\gamma\theta^v + \beta\gamma^u) - \tau^v(\theta^{vuu} - \theta^u\theta^{uv} + \\ + \beta^v\theta^v + \beta\theta^{vv} + \beta^{vv} + 2\beta\gamma^u + \gamma\beta^u) - \gamma^u = 0. \end{aligned}$$

Per le (3) segue

$$(10) \quad \gamma^u = 0.$$

(7) Si veda: M. VILLA e G. VAONA, *Alcune osservazioni sulle curve caratteristiche delle trasformazioni cremoniane*, questo Bollettino, ser. III, vol. V (1950), pp. 101-107.

Se le superficie  $F$  ed  $\bar{F}$  non sono rigate ( $\beta \cdot \gamma \neq 0$ ) la (10) prova appunto che *tali superficie sono due superficie applicabili del tipo  $R_0$*  <sup>(8)</sup>.

Se poi  $\beta\gamma = 0$  le due superficie  $F, \bar{F}$  sono due superficie rigate deformate proiettive l'una dell'altra.

7. Supposto infine che sia  $f(u) \neq 0, \varphi(v) \neq 0$  si dimostra che *le superficie  $F, \bar{F}$  sono due superficie applicabili del tipo  $R$  o eventualmente superficie rigate.*

Il procedimento seguito è analogo al precedente. Con un opportuno cambiamento di parametri sulle  $u = \text{cost}, v = \text{cost}$ , è sempre possibile far in modo che sia  $f(u) = 1, \varphi(v) = 1$ . Il cambiamento da eseguirsi è del tipo

$$\bar{u} = \bar{u}(u), \quad \bar{v} = \bar{v}(v),$$

dove le funzioni  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  sono integrali delle equazioni differenziali

$$\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)^2 = f(u), \quad \left(\frac{d\bar{v}}{dv}\right)^2 = \varphi(v).$$

Le condizioni d'integrabilità del sistema (6), ridotto alla forma descritta, conducono alla relazione

$$(11) \quad \gamma^u = \beta^v.$$

Supposto che le superficie  $F, \bar{F}$  non siano rigate ( $\beta\gamma \neq 0$ ) la (11) assicura che esse sono due superficie  $R$  <sup>(8)</sup>.

Se poi  $\beta\gamma = 0$  le superficie  $F, \bar{F}$  sono due superficie rigate deformate proiettive l'una dell'altra.