Bollettino Unione Matematica Italiana

Tristano Manacorda

Sul comportamento asintotico degli integrali di una classe di equazioni differenziali non lineari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 137–142.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_137_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Sul comportamento asintotico degli integrali di una classe di equazioni differenziali non lineari.

Nota di TRISTANO MANACORDA (a Firenze).

Sunto. - *Si dimostra che, sotto opportune ipotesi, tutti gli integrali dell'equazione differenziale:* $x''(t) + x(t) = \varphi(t) + f(t)g(x)$ *dove il termine perturbativo non lineare è il prodotto di una funzione del tempo per una funzione del posto, e alla quale si collegano parecchi problemi di meccanica non lineare, tendono asintoticamente all'integrale generale dell'equazione lineare:* $x''(t) + x(t) = \varphi(t)$.

1. Sia data l'equazione differenziale non lineare

$$x''(t) + x(t) = \varphi(t) + f(t)g(x), \tag{1}$$

in cui $f(t)$ e $\varphi(t)$ sono funzioni continue di t per $t_0 \leq t < \infty$, e la funzione $g(x)$ soddisfa alle condizioni:

$g(x)$ è lipschitziana per ogni x

$$| g(x_2) - g(x_1) | < l \, | x_2 - x_1 | , \qquad -\infty < x_2, \, x_1 < +\infty ; \tag{2}$$

$$g(0) = 0 ; \tag{3}$$

$g_x'(x) = dg/dx$ è limitata per ogni x e lipschitziana

$$| g_x'(x) | < k, \qquad | g_x'(x_2) - g_x'(x_1) | < m \, | x_2 - x_1 | . \tag{4}$$

Supponiamo poi che la funzione $f(t)$ soddisfi alle condizioni:

$$\int^{\infty} f(s)ds = \lim_{T \to \infty} \int^{T} f(s)ds \qquad \text{è convergente;} \tag{5_1}$$

$$\int_t^{\infty} dv \left| \int_v^{\infty} f(s)ds \right| < \infty , \tag{5_2}$$

ed infine che la funzione $\varphi(t)$ sia tale che l'equazione lineare

$$x''(t) + x(t) = \varphi(t) ,$$

ammetta un integrale *particolare* limitato con la sua derivata prima per $t \geq t_0$, di modo che anche l'integrale *generale* $x_0(t)$ della (6) è limitato con la sua derivata prima

$$| x_0(t) | \leq l_0 , \quad | x_0'(t) | \leq k_0 , \quad t \geq t_0 , \qquad l_0 \text{ e } k_0 \text{ costanti.} \tag{7}$$

Vogliamo allora provare che *con tutte queste ipotesi ogni integrale della* (1) *ha la forma asintotica:*

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon(t)\,, \tag{8}$$

con $\lim\limits_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0$, cioè la (1) è asintoticamente lineare.

2. Per le ipotesi (5) hanno significato, per $t \geq t_0$, le funzioni

$$F(t) = \int_t^\infty f(s)ds\,, \qquad G(t) = \max_{t \leq s < \infty} |\,F(s)\,|\,, \qquad H(t) = \int_t^\infty |\,F(s)\,|\,ds\,, \tag{9}$$

le quali tendono a zero per $t \to \infty$, e delle quali $G(t)$ e $H(t)$ sono funzioni non crescenti di t.

Si considerino ora le equazioni integrali:

$$x(t) = x_0(t) + \int_t^\infty F(s)\,\{\,g(x)\cos(t-s) - g_x'(x)x'(s)\operatorname{sen}(t-s)\,\}\,ds, \tag{10}$$

$$x'(t) = x_0'(t) - F(t)g(x) - \tag{11}$$
$$- \int_t^\infty F(s)\,\{\,g(x)\operatorname{sen}(t-s) + g_x'(x)x'(s)\cos(t-s)\,\}\,ds\,,$$

delle quali la seconda, ammesse le lecite operazioni, è ottenuta con una derivazione della prima. È facile convincersi che ogni soluzione delle (10), (11) soddisfa anche alla (1).

Per ogni soluzione $x_0(t)$ della (6), cioè per ogni coppia di valori attribuiti alle costanti arbitrarie che figurano in $x_0(t)$, costruiremo una soluzione delle (10) e (11) col metodo delle approssimazioni successive.

Poniamo a questo scopo

$$x_{n+1} = x_0 + \int_t^\infty F(s)\,\{\,g(x_n)\cos(t-s) - g_x'(x_n)x_n'(s)\operatorname{sen}(t-s)\,\}\,ds, \tag{10_{n+1}}$$

$$x_{n+1}' = x_0' - F(t)g(x_n) - \tag{11_{n+1}}$$
$$- \int_t^\infty F(s)\,\{\,g(x_n)\operatorname{sen}(t-s) + g_x'(x_n)x_n'(s)\cos(t-s)\,\}\,ds\,, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Proviamo che le (10_{n+1}) e (11_{n+1}) definiscono due successioni delle quali la seconda ottenuta per derivazione dalla prima.

Ricordando le (2), (3) e (7) si ha

$$(12_1)\qquad |x_1 - x_0| \leq \int_t^\infty |F(s)|\,\{|g(x_0)| + |g_x'(x_0)|\,|x_0'|\}\,ds \leq [ll_0 + kk_0]H(t)\,,$$

da cui

$$(13_1)\qquad |x_1| \leq l_0 + [ll_0 + kk_0]\,H(t) = \Im_1(t)\,,$$

e la funzione $\Im_1(t)$ è non crescente con t e tende ad l_0 per $t \to \infty$.

Analogamente

$$(14_1)\qquad |x_1' - x_0'| \leq ll_0 G(t) + [ll_0 + kk_0]H(t)\,,$$

da cui

$$(15_1)\qquad |x_1'| \leq k_0 + ll_0\, G(t) + [ll_0 + kk_0]H(t) = \psi_1(t)$$

e $\psi_1(t)$ è funzione non crescente di t e tende a k_0 per $t \to \infty$.

Si trova facilmente in generale che, posto:

$$(16)\qquad \begin{aligned} \Im_{n+1}(t) &= l_0 + [l\Im_n(t) + k\psi_n(t)]H(t)\,, \\ \psi_{n+1}(t) &= k_0 + l\Im_n(t)G(t) + [l\Im_n(t) + k\psi_n(t)]H(t)\,, \end{aligned}$$

con le $\Im_n$ e ψ_n funzioni non crescenti di t, $\Im_0 = l_0$, $\psi_0 = k_0$, si ha

$$(12_{n+1})\qquad |x_{n+1} - x_0| \leq [l\Im_n(t) + k\psi_n(t)]H(t)\,,$$

$$(13_{n+1})\qquad |x_{n+1}| \leq \Im_{n+1}(t)\,,$$

$$(14_{n+1})\qquad |x_{n+1}' - x_0'| \leq l\Im_n(t)G(t) + [l\Im_n(t) + k\psi_n(t)]H(t)\,,$$

$$(15_{n+1})\qquad |x_{n+1}| \leq \psi_{n+1}(t)\,.$$

Ammesse vere infatti le (12) - (15) per l'indice n, per l'indice $n+1$ si ha

$$|x_{n+1} - x_0| \leq \int_t^\infty |F(s)|\,\{l\,|x_n| + k\,|x_n'|\}\,ds \leq$$

$$\leq \int_t^\infty |F(s)|\,\{l\Im_n(s) + k\psi_n(s)\}\,ds\,,$$

e per la non crescenza delle $\Im_n$ e ψ_n

$$|x_{n+1} - x_0| \leq [l\Im_n(t + k\psi_n(t)]H(t)\,,$$

e analogamente per le altre disuguaglianze. Le (10) e (11) definiscono quindi effettivamente due successioni, delle quali la seconda è ottenuta per derivazione della prima.

Le successioni $\{\Im_n\}$ e $\{\psi_n\}$ sono successioni non decrescenti con n. Si ha infatti, per le (13_1), (15_1) e (16), $\Im_1 \geq \Im_0$, $\psi_1 \geq \psi_0$ per

$t \geq t_0$, ed in generale:

$$\mathfrak{I}_{n+1} \geq \mathfrak{I}_n \quad , \quad \psi_{n+1} \geq \psi_n . \tag{17}$$

Ammesse infatti vere le (17) per l'indice n, per quello $n+1$ si ha

$$\mathfrak{I}_{n+1} = l_0 + [l\mathfrak{I}_n(t) + k\psi_n(t)]H(t) \geq l_0 + [l\mathfrak{I}_{n-1}(t) + k\psi_{n-1}(t)]H(t) = \mathfrak{I}_n(t),$$

e analogamente per ψ_{n+1}.

Segue dunque che le successioni $\{\mathfrak{I}_n\}$ e $\{\psi_n\}$ ammettono limite, e detti $\mathfrak{I}(t)$ e $\psi(t)$ i due limiti si ha

$$\mathfrak{I}_n(t) \leq \mathfrak{I}(t), \quad \psi_n(t) \leq \psi(t), \qquad n = 0, 1, \ldots . \tag{18}$$

3. Occorre ora mostrare che le successioni $\{x_{n+1}\}$ e $\{x'_{n+1}\}$ definite dalle (10) e (11) sono convergenti. Avendosi

$$x_{n+1} = x_0 + \sum_0^n [x_{k+1} - x_k],$$

e analogamente

$$x'_{n+1} = x_0' + \sum_0^n [x'_{k+1} - x_k'],$$

basta dimostrare la convergenza della serie:

$$\sum_0^\infty [x_{k+1} - x_k] \quad \text{e} \quad \sum_0^\infty [x'_{k+1} - x_k']. \tag{19}$$

Si ha, per le (12_1) e (14_1)

$$|x_1 - x_0| \leq [ll_1 + kk_0]H(t) = \eta_1(t) \tag{19_1}$$

$$|x_1' - x_0'| \leq ll_0G(t) + \eta_1(t) = \omega_1(t), \tag{20_1}$$

e le η_1 e ω_1 sono funzioni non crescenti di t. Si ha poi

$$|x_2 - x_1| \leq \int_t^\infty |F(s)| \{l|x_1 - x_0| + |g_x'(x_1)x_1' - g_x'(x_0)x_0'|\} ds .$$

Ora si ha in generale

$$g_x'(x_n)x_n' - g_x'(x_{n-1})x'_{n-1} = g_x'(x_n)[x_n' - x'_{n-1}] + x'_{n-1}[g_x'(x_n) - g_x'(x_{n-1})],$$

onde per la (2)

$$|g_x'(x_n)x_n' - g_x'(x_{n-1})x'_{n-1}| \leq k|x_n' - x'_{n-1}| + |x'_{n-1}|\, m\, |x_n - x_{n-1}|. \tag{20}$$

Si ottiene così:

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &\leq \{[l + m\psi_0(t)]\eta_1(t) + k\omega_1(t)\} H(t) \leq \\ &\leq [l + m\psi(t) + k]H(t)\eta_1 + lG(t)H(t)l_0 = \eta_2(t), \end{aligned} \tag{19_2}$$

Posto per semplicità:

$$(21) \qquad [l + k + m\psi(t)]H(t) = \alpha(t), \qquad lG(t)H(t) = \beta(t),$$

si ha dunque

$$(19_2) \qquad | x_2 - x_1 | \leq \eta_2(t) = \alpha(t)\eta_1(t) + \beta(t)l_0 .$$

Analogamente:

$$(20_2) \qquad | x_2' - x_1' | \leq \omega_2(t) = lG(t)\eta_1(t) + \eta_2(t) \cdot$$

Si può facilmente provare per induzione che è in generale;

$$(19_{n+1}) \qquad | x_{n+1} - x_n | \leq \eta_{n+1}(t) = \alpha(t)\eta_n(t) + \beta(t)\eta_{n-1}(t),$$

$$(20_{n+1}) \qquad | x_{n+1}' - x_n' | \leq \omega_{n+1}(t) = lG(t)\eta_n(t) + \eta_{n+1}(t),$$

Sarà dimostrata la convergenza delle due serie (19) ove venga dimostrata quella delle serie $\sum_0^\infty \eta_{k+1}$ e $\sum_0^\infty \omega_{k+1}$.

Siccome per le (20_{n+1}) ogni ω_{n+1} si esprime linearmente mediante le η_{n+1} con coefficienti indipendenti da n, basta provare la convergenza della serie a termini positivi $\Sigma\eta_{n+1}$.

Ora, per le (19_{n+1}) si ha:

$$\sum_0^n \eta_{k+1} = \alpha(t) \sum_0^{n-1} \eta_{k+1} + \beta(t) \sum_0^{n-2} \eta_{k+1} + \beta(t)\eta_0$$

per cui

$$(22) \qquad [1 - \alpha(t) - \beta(t)] \sum_1^n \eta_{k+1} =$$

$$= \beta(t)\eta_0 + [\alpha(t) + \beta(t)]\eta_1 - \alpha(t)\eta_{n+1} - \beta(t)[\eta_{n+1} + \eta_n].$$

Siccome è $\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = \lim_{t \to \infty} \beta(t) = 0$, può supporsi che per $t \geq t_0$ sia $[1 - \alpha(t) - \beta(t)] \geq d^2 > 0$, d costante. Si ottiene così dalla (22)

$$(23) \qquad \sum_1^n \eta_{n+1}(t) \leq \frac{\beta(t)\eta_0 + [\alpha(t) + \beta(t)]\eta_1}{d^2},$$

e quindi la serie a termini positivi $\sum_1^\infty \eta_{k+1}$, avendo le sue somme parziali limitate, è convergente per ogni $t \geq t_0$. Essa è anche uniformemente convergente. Scelto un $\sigma > 0$, si può infatti trovare un t_1 tale che per ogni $t \geq t_1$ sia

$$\frac{\beta(t)\eta_0 + [\alpha(t) + \beta(t)]\eta_1}{d^2} < \sigma$$

e quindi anche, per la (23),

$$\sum_n^\infty \eta_{k+1} = R_n(t) < \sigma . \qquad t \geq t_1 .$$

Risulta così provato che la serie $\sum\limits_{1}^{\infty}\eta_{n+1}$ è convergente uniformemente, e sono quindi anche convergenti uniformemente le due serie $x_0 + \sum\limits_{0}^{\infty}[x_{k+1} - x_k]$ e $x_0' + \sum\limits_{0}^{\infty}[x'_{n+1} - x_k']$. Di queste, la seconda è ottenuta dalla prima derivandola termine a termine, e per la uniforme convergenza della serie $x_0' + \sum\limits_{0}^{\infty}[x'_{k+1} - x_n']$, se $x(t)$ è la somma della prima serie, la somma della seconda è $x'(t)$. Nelle (10_{n+1}) e (11_{n+1}) tenuto conto delle (5_2), (2) e (20), si ha che è lecito passare al limite sotto il segno di integrale, e quindi $x(t)$ rappresenta una soluzione della (1) e $x'(t)$ la sua derivata.

Dalle (12) e (14) si ha poi, passando al limite per $n \to \infty$.

$$|x(t) - x_0(t)| \leq [l\vartheta(t) + k\psi(t)]H(t),$$
$$|x'(t) - x_0'(t)| \leq l\vartheta(t)G(t) + [l\vartheta(t) + k\psi(t)]H(t),$$

per cui

$$\lim_{t\to\infty}[x(t) - x_0(t)] = \lim_{t\to\infty}[x'(t) - x_0'(t)] = 0\,, \tag{24}$$

Le (24) mostrano che ad ogni scelta di $x_0(t)$ corrisponde una differente $x(t)$, e quindi la nostra proposizione rimane completamente provata.

4. Le condizioni (4) possono sembrare più restrittive di quanto non lo siano in realtà. Effettivamente per parecchie equazioni non lineari del tipo (1) che sono state fin qui studiate, le condizioni (4) non sono soddisfatte perchè i termini non lineari provengono da sviluppi in serie di funzioni le quali soddisfano invece alle (4). Ad es. il teorema qui dimostrato si applica all' equazione

$$x'' + x = \varphi(t) + f(t)x / \sqrt{1 + x^2}\,, \tag{25}$$

che si riferisce ad una questione meccanica notevole e da me già studiata con altre ipotesi [1]; non è valido invece per l' equazione, comunemente riportata, che si ottiene dalla (25) sviluppando in serie la radice del secondo membro e trascurando i termini di ordine superiore al terzo in x.

[1] *Sopra una equazione differenziale non lineare della dinamica del punto.* « Rend. Ist. Lomb. » 80, (1947), pp. 85-98. Cfr. anche, *Vibrazioni forzate in un particolare sistema oscillante non lineare,* « Lincei Rend. », (8), 4 (1948), pp. 557-561.