Bollettino Unione Matematica Italiana

Carmelo Fusa

Sulla disuguaglianza di Noether.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 135–136.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_135_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Sulla disuguaglianza di Noether (*).

Nota di CARMELO FUSA (a Tregnago, Verona).

Sunto. - *Si dà la dimostrazione di una disuguaglianza che estende quella di* NOETHER *ai sistemi lineari di curve piane algebriche di genere* p.

Sia $|C_n|$ un sistema lineare irriducibile ∞^r $(r \geq 1)$ di curve piane algebriche di genere p; denotiamo con n l'ordine della curva generica C_n e con d il grado di $|C_n|$. Il sistema $|C_n|$ possegga i punti base $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$, in numero di $\nu + 1 \geq 3$, le cui molteplicità indichiamo con $h_0, h_1, \ldots, h_\nu$.

Ciò premesso, dimostriamo il seguente:

TEOREMA. - *Se le molteplicità* $h_0, h_1, \ldots, h_\nu$ *dei punti base* $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$ *del sistema lineare* $|C_n|$ *sono disposte in ordine non crescente, e se* $d < h_2(d - 2p + 2)$, *allora:* $h_0 + h_1 + h_2 > n$.

Poiché le curve di $|C_n|$ sono di genere p e si intersecano a

(*) Ringraziamo vivamente il chiar.mo prof. BENIAMINO SEGRE per i suggerimenti e i consigli che ci diede per questo lavoro.

due a due in d punti, si avrà

$$(1) \qquad (n-1)(n-2) - \sum_{i=0}^{\nu} h_i(h_i - 1) = 2p,$$

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{\nu} h_i^2 = n^2 - d,$$

da cui è facile dedurre le:

$$(3) \qquad \sum_{i=3}^{\nu} h_i = 3n + 2(p-1) - d - h_0 - h_1 - h_2,$$

$$(4) \qquad \sum_{i=3}^{\nu} h_i^2 = n^2 - d - h_0^2 - h_1^2 - h_2^2 \text{ (1)}.$$

Moltiplicando la (3) per h_2 e sottraendo la (4), viene:

$$h_2 \sum_{i=3}^{\nu} h_i - \sum_{i=3}^{\nu} h_i^2 = n(3h_2 - n) - d(h_2 - 1) + \\ + h_2(2p - 2 - h_0 - h_1) + h_0^2 + h_1^2.$$

Ora, per le ipotesi ammesse, il primo membro di questa uguaglianza è maggiore o uguale a zero. Quindi sarà anche

$$n(3h_2 - n) - d(h_2 - 1) + h_2(2p - 2 - h_0 - h_1) + h_0^2 + h_1^2 \geq 0.$$

Se ora fosse: $h_0 + h_1 + h_2 \leq n$, sarebbe

$$2(h_2^2 - h_0 h_1) - h_2(d - 2p + 2) + d \geq 0;$$

il che non può essere nelle ipotesi ammesse. Ne viene che deve aversi

$$h_0 + h_1 + h_2 > n,$$

come asserito. Si vede inoltre che, nella precedente argomentazione, la disuguaglianza $d < h_2(d - 2p + 2)$ non può venir sostituita da altra meno restrittiva.

(1) Ved. per es.: G. CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*. « Memorie dell'Acc. di Torino », s. II, t. XLII, 1891. « Memorie Scelte », Bologna, 1937, pag 137 e segg.