Franca Graiff

Sulla possibilità di costruire parallelogrammi chiusi in alcune varietà a torsione.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.2, p. 132–135.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_132_0>

Sulla possibilità di costruire parallelogrammi chiusi in alcune varietà a torsione.

Nota di FRANCA GRAIFF (a Milano).

Sunto. - *Si collegano le recenti considerazioni di* BOMPIANI *sul tensore di torsione con i due tipi di trasporto parallelo usati da* EINSTEIN *nella sua ultima teoria unitaria.*

Si osserva che questi due tipi di trasporto, successivamente usati, permettono la costruzione di parallelogrammi chiusi in spazi a torsione e si fanno alcune considerazioni geometriche in proposito.

1. Recentemente BOMPIANI (1), prendendo in considerazione uno spazio a connessione affine asimmetrica di componenti:

$$L^i_{lh} = \Gamma^i_{lh} + S_{lh}{}^i \; ; \; S_{lh}{}^i \; (^2) \tag{1}$$

ha messo in evidenza il significato del tensore di torsione $S_{lh}{}^i$, ottenendo il seguente risultato: il trasporto parallelo di un vettore di componenti ξ^i da un punto x^i a un punto $x^i + dx^i$ infinitamente vicino, si può interpretare come il risultato di una doppia operazione sul vettore; e precisamente:

a) si applica al detto vettore una centro-affinità infinitesima che lo muta in un vettore $\xi^{\bar{i}}$ nel modo che verrà sotto specificato;

b) si applica al vettore $\xi^{\bar{i}}$ così ottenuto il trasporto parallelo da x^i a $x^i + dx^i$ secondo la connessione simmetrica associata.

(1) Cfr. E, BOMPIANI, *Significato del tensore di torsione in una connessione affine,* « Bollett. dell' U. M. I. », (3), 6, (1951), 273-276.

(2) In questa notazione, con Γ^i_{lh} si indicano le componenti della connessione simmetrica associata a quella data: $\Gamma^i_{lh} = L^i_{(lh)} = \frac{1}{2}(L^i_{lh} + L^i_{hl})$ mentre con $S_{lh}{}^i$ si indicano le componenti del tensore di torsione della connessione data: $S_{lh}{}^i = L^i_{[hl]} = \frac{1}{2}(L^i_{lh} - L^i_{hl}\,;)$. La locuzione di connessione simmetrica associata è dovuta ad EN. BORTOLOTTI, *Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle trasformazioni che conservano il parallelismo,* « Ann. di Mat. », (1930), (4), VIII, p. 53-101, n. 3. La connessione simmetrica associata e quella coniugata sono già considerate nell'altra Memoria di ENEA BORTOLOTTI, *Parallelismo assoluto nelle varietà a connessione affine e nuove vedute sulla relatività.* « Mem. Acc. Scienze di Bologna », (8), t. VI, (1928-29), p. 45-56.

La centro-affinità è individuata dal tensore di torsione e dal sistema di differenziali dx^i, ed è rappresentata dal tensore doppio:

(2) $$\delta^i_h - S_{hl}^{\cdot\cdot i} dx^l$$

essa muta il vettore ξ^h nel vettore $\bar{\xi}^i$ secondo la formula:

(3) $$\bar{\xi}^i = \xi^l(\delta^i_h - S_{lh}^{\cdot\cdot i} dx^l) \text{ (}^3\text{)}.$$

È evidente che lo stesso tensore di torsione e lo stesso sistema di differenziali individuano un'altra centro-affinità, che è, come la prima, infinitamente vicina all'identità: essa è rappresentata dal tensore doppio:

(4) $$\delta^i_l + S_{lh}^{\cdot\cdot i} dx^l = \delta^i_h - S_{hl}^{\cdot\cdot i} dx^l.$$

Essa è la centro-affinità inversa della precedente perchè il suo prodotto con la precedente dà l'identità, a meno, naturalmente di infinitesimi di ordine superiore al primo. Si ha infatti per la (3), limitandosi, come sempre, ai termini di I° ordine:

$$\bar{\bar{\xi}}^r = \bar{\xi}^i(\delta_i^{\ r} + S_{si}^{\cdot\cdot r} dx^s) = \xi^h \delta_h^{\ r} = \xi^r.$$

Mentre alla prima centro-affinità e alla connessione simmetrica associata corrisponde il trasporto parallelo di un vettore dato dalla:

(5) $$d\xi^i = - L^i_{lh} \xi^h dx^l$$

alla seconda ed alla stessa connessione simmetrica precedentemente considerata, corrisponde un altro trasporto parallelo individuato dalla stessa connessione usata con indici scambiati L^i_{hl} e cioè dalla connessione coniugata della data.

La connessione coniugata ad una data e le sue relazioni con questa e con la connessione simmetrica associata sono state ampliamente considerate da ENEA BORTOLOTTI (l. c.).

I trasporti che ne derivano sono considerati di nuovo nell'ultima teoria di EINSTEIN, e sono necessari per lo svolgimento della stessa, costituendone una delle premesse sulla quale essa è impostata. Essi vengono distinti mediante due segni diversi:

$$d\overset{i}{\xi}{}^{+} = - L^i_{lh} \xi^l dx^h; \qquad d\overset{i}{\xi}{}^{-} = - L^i_{lh} \xi^h dx^l \text{ (}^4\text{)}.$$

(3) Con δ^i_l vengono indicati i simboli di KRONECKER; essi hanno il valore 1 per $i = h$ il valore 0 per $i \neq h$; la centro-affinità individuata dal tensore (2) è perciò infinitamente vicina all'identità.

(4) Nelle notazioni di EINSTEIN i coefficienti di connessione L^i_{hl} vengono indicati con Γ^i_{lh}, la loro parte simmetrica con $\Gamma^i_{\underline{lh}}$ ed il tensore di torsione con $\Gamma^i_{\underset{\vee}{hl}}$.

2. È noto che in uno spazio a torsione, se si considera un punto x^i (che indicheremo con P), due vettori infinitesimi spiccati da esso, dx^i e δx^i (che indicheremo con dP e δP), trasportando parallelamente dP lungo δP e δP lungo dP, gli estremi dei due vettori così ottenuti non coincidono e quindi il parallelogrammo così costruito non si chiude.

Infatti le coordinate dei punti ai quali si arriva trasportando dP lungo δP e δP lungo dP mediante il trasporto parallelo definito dalla (5), sono rispettivamente:

$$1)\quad x^i + dx^i + \delta(x^i + dx^i) = x^i + dx^i + \delta x^i - L^i{}_{lh} dx^h \delta x^l$$

$$2)\quad x^i + \delta x^i + d(x^i + \delta x^i) = x^i + \delta x^i + dx^i - L^i{}_{lh} dx^l \delta x^h.$$

Essi sono tra di loro distinti per la asimmetria dei coefficienti $L^i{}_{lh}$.

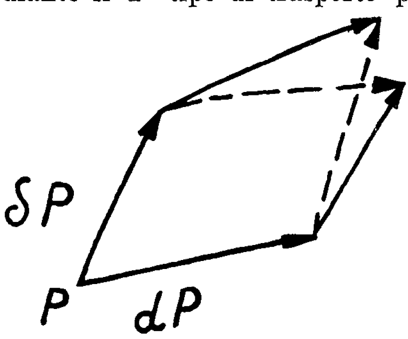
È noto anche che, se si eseguiscono le stesse operazioni con la connessione simmetrica associata, i punti a cui si arriva coincidono, perchè i due ultimi termini delle 1) e 2) sono eguali quando a $L^i{}_{lh}$ si sostituisca $\Gamma^i{}_{lh}$. Dunque la mancata chiusura del parallelogrammo infinitesimo è dovuta alla centro-affinità che si applica in P all'uno ed all'altro dei vettori, prima di eseguire il trasporto parallelo con la connessione simmetrica associata.

Naturalmente, quanto è stato detto per la connessione asimmetrica $L^i{}_{lh}$, vale per la sua trasposta; se, servendosi di essa, si ripetono le operazioni precedenti, si arriva ai due punti distinti:

$$3)\quad x^i + dx^i + \delta(x^i + dx^i) = x^i + dx^i + \delta x^i - L^i{}_{lh} dx^l \delta x^h$$

$$4)\quad x^i + \delta x^i + d(x^i + \delta x^i) = x^i + \delta x^i + dx^i - L^i{}_{lh} dx^h \delta x^l.$$

Si può però osservare che, se si trasporta dP lungo δP mediante il I° tipo di trasporto parallelo e δP lungo dP mediante il II°, il parallelogramma si chiude e si arriva ai punti coincidenti 1) e 4). Ciò equivale infatti ad applicare in P al vettore dP la centro-affinità (3) e a δP la centro-affinità inversa (individuata dal tensore (4)) e poi trasportare i vettori così ottenuti con la connessione simmetrica associata.



Naturalmente le stesse considerazioni valgono per i punti 2) e 3) in cui è solo scambiato l'ufficio dei due tipi di trasporto asimmetrico.

3. Queste operazioni si presentano spontanee negli spazi di EINSTEIN, nei quali, come è già stato detto, i due tipi di trasporto vengono indicati con i segni — e + applicati agli indici.

Per avere una imagine geometrica di questa specie di polarizzazione nella derivazione introdotta da EINSTEIN, consideriamo un elemento superficiale individuato dai due vettori infinitesimi dP e δP, e distinguiamo su di esso due faccie: una che chiamiamo positiva l'altra che chiamiamo negativa.

Imaginiamo che sulla faccia positiva il trasporto parallelo sia quello indicato con il segno + e che sulla negativa il trasporto parallelo sia quello indicato con il segno —; se si trasporta il vettore infinitesimo dP lungo δP e δP lungo dP sopra una stessa faccia, i due punti ai quali si arriva non coincidono, come in una qualsiasi varietà a torsione; ma se si trasporta δP lungo dP sulla faccia positiva e dP lungo δP sulla faccia negativa, i due punti a cui si giunge coincidono ed il parallelogramma si chiude; lo stesso avviene se si trasporta dP lungo δP sulla faccia positiva e δP lungo dP sn quella negativa.