
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MODESTO DEDÒ

Sulle condizioni di regolarità di una trasformazione analitica di De Jonquières.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.
7 (1952), n.2, p. 108–110.*

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_108_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_2_108_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sulle condizioni di regolarità di una trasformazione analitica di De Jonquière.

Nota di MODESTO DEDÒ (a Milano).

Sunto. - *Si dà la rappresentazione di una trasformazione analitica analoga a quella di DE JONQUIÈRES definita da una coppia di rami lineari corrispondenti e da una coppia di rami superlineari del secondo ordine (pure corrispondenti). Si deducono le condizioni di regolarità nell'intorno. Si accenna a possibili estensioni.*

1. Questa « piccola nota » trae il suo spunto da una verifica analitica eseguita a proposito di un recente lavoro ⁽¹⁾ del prof. O. CHISINI, il quale ha avuto occasione di adoperare una trasformazione di DE JONQUIÈRES del tipo qui considerato: è parso che valesse la pena di segnalare questa verifica sia allo scopo di richiamare l'attenzione sull'agilità con cui si possono fare conti di questo tipo, sia perchè questo risultato può essere considerato come un piccolo complemento ad altra nota da me pubblicata in questo stesso « Bollettino » ⁽²⁾.

2. Una trasformazione centrale di DE JONQUIÈRES — il cui centro collochiamo nel punto improprio dell'asse y — è definita, nell'intorno di $x=0$, da tre coppie di rami lineari corrispondenti. Nella mia nota citata viene scritta l'equazione di una tale trasformazione (n. 6) e vengono date le condizioni perchè una tale trasformazione risulti regolare (n. 7): condizioni che, con linguaggio

⁽¹⁾ O. CHISINI, *Sulla costruzione a priori delle treccie caratteristiche*. « Annali di Matematica pura ed applicata », (4), 33 (1952).

⁽²⁾ M. DEDÒ, *Sulle trasformazioni di De Jonquière*. « Boll. Un. Mat. It. », (3), 4 (1949), pp. 353-367.

geometrico, si esprimono dicendo che « le due configurazioni differenziali costituite dalle due terne di rami corrispondenti (e dalla retta unita $x=0$) sono proiettivamente uguali ».

3. Il risultato precedente è valido nel campo algebrico e nel campo analitico in cui i rami considerati siano lineari; esso si estende al caso in cui la trasformazione sia definita, nell'intorno di $x=0$, da due configurazioni delle quali facciano parte anche rami superlineari: appare evidente che, anche in questo caso, la condizione perchè la trasformazione risulti regolare, nell'intorno di $x=0$, è che le due configurazioni differenziali siano proiettivamente uguali: dal seguito risulterà precisato il senso di questa frase.

Di questo fatto si possono dare verifiche più o meno laboriose. Esponiamo, per il caso che ci interessa, quella che è parsa la più semplice (tra altre sperimentate); notiamo che essa serve anche per casi più generali di quello per cui fu instaurata.

4. Si consideri la trasformazione (analoga a quella di DE JONQUIERES) ottenuta costruendo su ciascuna parallela all'asse y — nell'intorno di $x=0$ — la proiettività che si ottiene associando i punti $y_1, y_1'; y_2, y_2'; y_3, y_3'$ dati dagli sviluppi:

$$(1) \quad y_1 = a + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$$(1') \quad y_1' = a' + a_1'x + a_2'x^2 + \dots$$

$$(2) \quad y_2 = b + b_1x^{\frac{1}{2}} + b_2x^{\frac{2}{2}} + b_3x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

$$(2') \quad y_2' = b' + b_1'x^{\frac{1}{2}} + b_2'x^{\frac{2}{2}} + b_3'x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

$$(3) \quad y_3 = b - b_1x^{\frac{1}{2}} + b_2x^{\frac{2}{2}} - b_3x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

$$(3') \quad y_3' = b' - b_1'x^{\frac{1}{2}} + b_2'x^{\frac{2}{2}} - b_3'x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

È ovvio che gli sviluppi (2), (3) costituiscono un unico ramo superlineare del secondo ordine, al quale la trasformazione considerata fa corrispondere il ramo costituito dagli sviluppi (2'), (3'). Pertanto si può realizzare un'altra trasformazione analoga alla precedente, che muti il ramo (2) (3) nel ramo (2') (3'), ove si associ allo sviluppo (2) lo sviluppo (3') e, conseguentemente, (3) a (2'). Questo caso è del tutto analogo e porta alle medesime condizioni di regolarità.

5. Premettiamo ora la seguente ovvia

OSSERVAZIONE. - L'equazione del fascio di proiettività definito, tra due rette, dalle due coppie di punti corrispondenti $y = a$, $y' = a'$; $y = b$, $y' = b'$, si può scrivere nella forma

$$(4) \quad \frac{(y - a)(y' - b')}{(y' - a')(y - b)} = k$$

e le due proiettività degeneri del fascio si hanno per $k = 0$ e per $k = \infty$.

6. Nel nostro caso si ha pertanto che il fascio delle trasformazioni di DE JONQUIÈRES che portano gli sviluppi (1), (2) negli sviluppi (1'), (2'), è rappresentato dall'equazione

$$(5) \quad \frac{(y - a - a_1x - a_2x^2 - \dots)(y' - b' - b_1'x^{\frac{1}{2}} - b_2'x^{\frac{2}{2}} - b_3'x^{\frac{3}{2}} - \dots)}{(y' - a' - a_1'x - a_2'x - \dots)(y - b - b_1x^{\frac{1}{2}} - b_2x^{\frac{2}{2}} - b_3x^{\frac{3}{2}} - \dots)} = k.$$

Sostituendo ora ad y e y' rispettivamente gli sviluppi (3) e (3') si ottiene, dopo qualche semplificazione:

$$(6) \quad k = \frac{[(b - a) - b_1x^{\frac{1}{2}} + (b_2 - a_1)x - b_3x^{\frac{3}{2}} + \dots](b_1' + b_2'x + \dots)}{[(b' - a') - b_1'x^{\frac{1}{2}} + (b_2' - a_1')x - b_3'x^{\frac{3}{2}} + \dots](b_1 + b_3x + \dots)}$$

e possiamo quindi concludere che *condizione necessaria e sufficiente perchè la trasformazione di DE JONQUIÈRES, definita dagli sviluppi (1) e (1'), (2) e (2'), (3) e (3'), sia regolare, nell'intorno di $x = 0$, è che l'espressione (6) risulti, per x tendente a zero, finita e diversa da zero.*

7. Notiamo in particolare che la trasformazione risulta certo regolare, nell'intorno di $x = 0$, quando i due rami lineari corrispondenti non escano dagli stessi punti da cui escono i rami superlineari ($a \neq b$, $a' \neq b'$) e quando i rami superlineari siano relativi a due cuspidi 'di prima specie (con tangente cuspidale distinta dall'asse y) ($b_1 = b_1' = 0$; $b_3 \neq 0$, $b_3' \neq 0$) come accade nel caso occorso al Prof. CHISINI.

La nostra verifica, così come è fatta, serve non solo nel caso di due cuspidi ordinarie ma, più generalmente, in quello di due successioni di punti doppi di tipo qualunque. Essa si presta anche ad ulteriori generalizzazioni.