Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Antonio Rosati

Costruzione di polinomi irriducibili di eguale grado di cui i moduli delle differenze delle radici corrispondenti soddisfano a limitazioni prescritte.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.1, p. 68–69.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_68_0>

Costruzione di polinomi irriducibili di eguale grado di cui i moduli delle differenze delle radici corrispondenti soddisfano a limitazioni prescritte.

Nota di Luigi Antonio Rosati (a Firenze).

Sunto. - *Come le prime righe della nota.*

È noto che se due polinomi irriducibili hanno una radice in comune essi, a meno di un fattore costante, sono identici e tutte le loro radici coincidono.

Sia $A(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ *un polinomio di grado* n *a coefficienti razionali* $a_1, a_2, \dots, a_n$, *irriducibile nel campo assoluto di razionalità* K(1), *e siano* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *le sue radici.* Facciamo vedere che *scelti due numeri positivi arbitrari* ε, M *e fissate le radici* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, $(r < n)$, *in modo che fra esse insieme a una qualsiasi vi sia la coniugata, esiste un polinomio* $B(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$ *a coefficienti razionali* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *irriducibile in* K(1) *di radici* $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ *tale che*

$$|\alpha_i - \beta_i| < \varepsilon, \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$
$$|\alpha_j - \beta_j| > M, \qquad (j = r+1, r+2, \dots, n).$$

Si faccia corrispondere ad ogni radice α_h di $A(x)$ il numero θ_h, razionale se α_h è reale, complesso e con parte reale e coefficiente dell'immaginario razionali se α_h è complessa; inoltre a radici α_h, α_l coniugate corrispondano numeri θ_k, θ_l coniugati e si abbia

$$(1) \qquad \begin{aligned} &|\alpha_i - \theta_i| < \frac{\varepsilon}{2}, && (i = 1, 2, \dots, r), \\ &|\alpha_j - \theta_j| > M + \frac{\varepsilon}{2}, && (j = r+1, r+2, \dots, n). \end{aligned}$$

Il polinomio

$$P(x) = \prod_{h=1}^{n} (x - \theta_h)$$

ha i coefficienti razionali.

È noto che, in base a un risultato di Hilbert [1], esistono infiniti valori interi di t per cui il polinomio $tP(x) + 1$ è irriducibile

[1] Cfr. D. Hilbert: « Journ. f. reine ang. Math. », 110 (1892), pagg. 104-129.

in $K(1)$. Scelto allora il numero positivo σ esiste un numero razionale positivo $\eta < \sigma$ tale che il polinomio

$$B(x) = P(x) + \eta$$

è irriducibile in $K(1)$. D'altra parte le radici di un polinomio sono funzioni continue dei coefficienti ([2]) sicchè se σ è stato scelto convenientemente alle radici θ_h di $P(x)$ possiamo far corrispondere le radici β_h di $B(x)$ in modo che si abbia

$$|\theta_h - \beta_h| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (h = 1, 2, \dots, n).$$

E per le (1)

$$|\alpha_i - \beta_i| \leq |\alpha_i - \theta_i| + |\theta_i - \beta_i| < \varepsilon, \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

$$|\alpha_j - \beta_j| \geq \| \alpha_j - \theta_j | - | \theta_j - \beta_j \| > M + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = M,$$

$$(j = r + 1, r + 2, \dots, n) \text{ c. v. d.}$$