Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

Osservazioni sul “Neocribrum” di L. Poletti.

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.1, p. 63–67.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_63_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Osservazioni sul « Neocribrum » di L. Poletti.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

Sunto. - *Si fanno delle osservazioni utili alla ricerca delle posizioni fondamentali relative al « Neocribrum » di* L. POLETTI.

Il Neocribrum » di L. POLETTI deriva in fondo dal classico Crivello di ERATOSTENE (1).

Divisi i numeri della serie naturale in cicli di $30030 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$ numeri ciascuno, in modo cioè che il 1°, 2° Ciclo

(1) Di un metodo analogo si è dovuto servire FRANZ SCHAFFGOTSH, *Gesetz, welches zur Fortsetzung der bekannten Pellischen Tafeln dient, Abhand.* Privatgesellschat in Böhmen, Praga, (1782), pp. 354-382. Cfr. anche BEGUELIN e TESSANEK, id., pp. 362, 379. Per notizie bibliografiche relative alle tavole dei num. primi, ai Crivelli, ed ai metodi di fattorizzazione Cfr. G. PALAMÀ, *Una grande impresa: Continuazione della Tavola dei numeri primi di* LEHMER *a mezzo delle tavole del* KULIK, *del* POLETTI *e del* PORTER, « Bol. dell' Un. Mat. It. », Serie III, Anno V, (dic. 1950), pp. 343-60.

ecc., comprendano rispettivamente i numeri

$$1,\ 2, \dots,\ 30030:$$
$$30031,\quad 30032, \dots,\ 60060;$$

ecc., ed osservato che i numeri non divisibili per 2, 3. 5, sono del tipo

$$30m + r, \quad (r = 1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23.\ 29),$$

il POLETTI si serve di una Tabella (« Neocribrum »), che. ad es., per il 2° Ciclo ha l'aspetto seguente

30030

Num.		*a* 1	*b* 7	*c* 11	*d* 13	*d'* 17	*c'* 19	*b'* 23	*a'* 29	ORDO
	30		7	11	13					1
	60						7			2
	90					7				3
	⋮									⋮

per inscrivere in corrispondenza di ogni numero non primo il suo divisore più piccolo. Una volta determinate le cosidette *Posizioni Fondamentali* corrispondenti ad un dato primo p, cioè i numeri d'ordine (*Ordo* del « Neocribrum »), più piccoli i cui numeri corrispondenti. alle varie colonne $a, b, \dots, b', a'$ sono divisibili per p, i numeri d'ordine dell'altre caselle ai quali corrispondono numeri multipli dello stesso p si ottengono, naturalmente, aggiungendo a ciascuna delle dette posizioni fondamentali i successivi multipli di $p: p, 2p, 3p, \dots$.

Nel « Neocribrum » sono però già inscritti dal suo Autore i divisori primi 7, 11, 13, le cui posizioni fondamentali sono, come si vedrà in seguito, indipendenti dal numero d'ordine n del Ciclo. Ovviamente ad operazione ultimata risultano primi i numeri corrispondenti alle caselle rimaste in bianco.

Da ciò che precede si vede quanto sia importante la determinazione delle posizioni fondamentali che indichiamo con $H_r^{(n)}(p)$, $(r = 1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29)$, dell' n^{mo} Ciclo, (o Ciclo n), relative ad un dato numero primo p.

Lo scopo appunto di questa Nota è quello di indicare vari modi per la determinazione delle $H_r^{(n)}(p)$ e diverse formule utili al loro controllo.

1. Gli $H_r^{(n)}(p)$ si possono determinare innanzi tutto a mezzo della

$$30[(n-1)1001 + H_r^{(n)}(p) - 1] + r \equiv 0, \qquad (\text{mod.}\, p) \tag{1}$$
$$(r = 1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29).$$

2. Osservazione 1ª - Poichè $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, se è $p = 7,\ 11,\ 13$ la (1) si semplifica nella

$$30[H_r^{(n)}(p) - 1] + r \equiv 0, \qquad (\text{mod.}\, p), \quad (p = 7,\ 11,\ 13), \tag{2}$$

che fa vedere come le posizioni fondamentali per $p = 7,\ 11,\ 13$ sono indipendenti da n.

3. Osservazione 2ª - Dalla (1) per $n = 1$, si ha la

$$30[h_r(p) - 1] + r \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p), \tag{3}$$

ove si è posto $h_r(p)$ invece di $H_r^{(1)}(p)$. Le posizioni fondamentali di p per il 1° Ciclo cioè le $h_r(p)$,si dicono *iniziali*, pertanto per il loro calcolo si può utilizzare la (3) (²).

4. Osservazione 3ª - La (1) se la sommiamo con la stessa (1), dopo avervi cambiato r in $30-r$, dà

$$2(n-1)1001 + H_r^{(n)}(p) + H_{30-r}^{(n)} \equiv 1 \qquad (\text{mod.}\, p), \quad (r = 1,\ 7,\ 11,\ 13),$$

da cui in particolare si trae:

a) che è costante (mod. p) la

$$H_r^{(n)}(p) + H_{30-r}^{(n)}(p), \qquad (r = 1,\ 7,\ 11,\ 13);$$

b) che è (per $n = 1$)

$$H_r^{(1)}(p) + H_{30-r}^{(1)}(p) \equiv 1 \qquad (\text{mod}\, p), \quad (r = 1,\ 7,\ 11,\ 13). \ (^3)$$

5. Poichè $h_r(p)$ sono le posizioni iniziali di p, le fondamentali per l' n^{mo} Ciclo, qualora il numero d' ordine, (« Ordo »), del Neocribrum, fosse progressivo, cioè non ricominciasse daccapo in ogni Ciclo, sarebbero date da

$$\begin{aligned} h_r(p) + p + \ldots + p + p + \ldots\ldots + p + \ldots\ldots + p + \ldots\ldots + p &= \\ (1),\ \ldots,\ (q),\ (q+1), \ldots,\ (2q), \ldots,\ ((n-2)q+1), \ldots,\ ((n-1)q) & \\ = h_r(p) + (n-1)qp & \end{aligned}$$

(²) Cfr. G. Palamà, *Tabella delle Posizioni iniziali relative al « Neocribrum » di* L. Poletti, « Rivista di Mat. dell' Univ. di Parma », I, (1950) pp. 85-98.

(³) Cfr. l. c. in (²).

ove è

$$q=\left[\frac{1001}{p}\right]$$

avendo posto

(4) $$1001=qp+d, \qquad d\leq p-1,$$

ossia da

$$h_r(p)+(n-1)(-d+1001);$$

ma, poichè la numerazione in ogni Ciclo comincia daccapo, si deve sottrarre dall'ultima espressione $1001(n-1)$ e si ha così la

$$H_r^{(n)}(p)\equiv h_r(p)-d(n-1) \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

che per la (4) può anche scriversi

(5) $$H_r^{(n)}(p)\equiv h_r(p)-1001(n-1) \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

già trovata in altro modo [4].

6. Le posizioni fondamentali relative ad un dato numero primo si ripetono nei successivi Cicli periodicamente. Difatti nel 2° membro della (5) le $h_r(p)$ sono, per un dato p, costanti, invece $1001(n-1)$ per $n=1, 2, 3, \ldots$ dà i termini di una progressione aritmetica di ragione 1001 prima con p, ($p\neq 7, 11, 13$), e perciò i primi p di tali termini divisi per p danno tutti i resti possibili, cioè $0, 1, \ldots, p-1$, a prescindere però dall'ordine. Quindi nei successivi Cicli $p+1, \ldots, 2p$ si riproducono e nello stesso ordine gli stessi resti, e così via.

Pertanto, se si dispone di una collezione di posizioni fondamentali relative a diversi Cicli successivi sino ad un certo Ciclo N, le posizioni fondamentali di un qualsiasi primo p di un Ciclo $n>N$, sono uguali a quelle dello stesso p del Ciclo d', se d' è il resto della divisione di n per p, cioè se è

(6) $$n=pq+d,$$

purchè è

$$d'\leq N.$$

Difatti sostituendo nella (5) ad n il suo valore dato dalla (6), si ha

$$H_r^{(n)}(p)\equiv h_r(p)-(d'-1)1001 \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

che, se è $d'\leq N$, sono anche le deposizioni del Ciclo d' già considerato. Ora tale condizione $d'\leq N$ è verificata per tutti i primi p

[4] Cfr. l. c. in [2].

tali che sia $p \leq N+1$, perchè, essendo $0, 1, 2, \ldots, p-1$ i valori possibili di d', se è $p-1 \leq N$, cioè $p \leq N+1$, si ha sempre $d' \leq N$.

7. Per posizioni iniziali si possono assumere quelle di un Ciclo n qualsiasi e cominciare poi da esso la numerazione dei Cicli successivi.

Se indichiamo con $h_r^{(n)}(p)$ le posizioni fondamentali dell' n^{mo} Ciclo che assumiamo come iniziali, si ha, per le posizioni fondamentali dell' $(n_1+n-1)^0$, la

$$H_r^{(n_1)}(p) \equiv h_r^{(n)}(p) - 1001(n_1-1) \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

ove va notato il caso $n_1 = 2$ [5].

8. Dalla (5) si ha, (se r' è uno dei numeri 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ma è $r' \neq r$),

$$H_{r'}^{(n)}(p) - H_r^{(n)}(p) \equiv h_{r'}(p) - h_r(p) \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

Quindi, una volta ricavato $H_1^{(n)}(p)$, basta aggiungervi successivamente le differenze mod p

$$h_7(p) - h_1(p), \quad h_{11}(p) - h_1(p), \quad \text{ecc.}$$

per ottenere rispettivamente

$$H_7^{(n)}(p), \quad H_{11}^{(n)}(p), \quad \text{ecc.}$$

Analogamente dalla (1) si hanno le

$$\begin{aligned} 15[H_{29}^{(n)}(p) - H_1^{(n)}(p)] + 14 &\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p), \\ 15[H_{23}^{(n)}(p) - H_7^{(n)}(p)] + 8 &\equiv 0 \qquad \text{»} \\ 15[H_{19}^{(n)}(p) - H_{11}^{(n)}(p)] + 4 &\equiv 0 \qquad \text{»} \\ 15[H_{17}^{(n)}(p) - H_{13}^{(n)}(p)] + 2 &\equiv 0 \qquad \text{»} \end{aligned}$$

dalle quali si traggono ad es. le

$$\begin{aligned} H_{19}^{(n)}(p) - H_{11}^{(n)}(p) &\equiv 2[H_{17}^{(n)}(p) - H_{13}^{(n)}(p)] \qquad (\mathrm{mod}\ p), \\ H_{23}^{(n)}(p) - H_7^{(n)}(p) &\equiv 2[H_{19}^{(n)}(p) - H_{11}^{(n)}(p)] \qquad \text{»} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &H_{29}^{(n)}(p) - H_{23}^{(n)}(p) - H_{19}^{(n)}(p) - H_{17}^{(n)}(p) \equiv \\ &\equiv H_1^{(n)}(p) - H_7^{(n)}(p) - H_{11}^{(n)}(p) - H_{13}^{(n)}(p) \qquad (\mathrm{mod}\ p). \end{aligned}$$

ecc.

[5] I resti, (mod. p) di -1001, indicati con h, sono riportati, per ogni p primo ≤ 3547, nell' ultima colonna della tabella del l. c. in [2].