Bollettino
Unione Matematica Italiana

Umberto Bini

Un teorema di Cauchy.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.1, p. 59–63.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_59_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Un teorema di Cauchy.

Nota di UMBERTO BINI (a Roma).

Sunto. - *Viene data nuova dimostrazione di un teorema di* CAUCHY (Oeuvres, t. 4, pag. 501) *sulla divisibilità di* $(a+b)^n - a^n - b^n$ *per* $nab(a+b)(a^2+ab+b^2)$ *ed* $n(a+b)ab(a^2+ab+b^2)^2$, *determinando le espressioni dei quoti delle due divisioni.*

1. Siano x, y interi positivi (non nulli) e $x > y$; poniamo

$$A = x + y, \qquad D = x - y, \qquad P = xy, \qquad M_n = x^n + y^n,$$

$$b_n = \frac{M_n}{A}, \qquad B_n = \frac{A^{n-1} - b_n}{n}.$$

([2]) Pei due autori citati si ha ortogonalità a destra perchè si risolve il sistema $xA = b$, quindi $D^{-\frac{1}{2}}.\ A_{-1}$ risulta ortonormale a destra.

([3]) Nel teorema I di AQUARO i vettori in A sono disposti per righe anzichè per colonne.

TEOREMA. - *È anzitutto* $B_3 = P$; *se poi* $2n + 1$ *è del tipo* $6h - 1$, *il numero intero*

$$B_{2n+1} = \frac{A^{2n} - b_{2n+1}}{2n + 1}$$

è divisibile per $P(A^2 - P)$, *mentre se è del tipo* $6h + 1$, *è divisibile per* $P(A^2 - P)^2$.

Intanto

$$B_3 = \frac{1}{3} \{ (x + y)^3 - (x^3 - xy + y^3) \} = xy$$

Partiamo ora dal noto sviluppo

$$M_{2n+1} = A^{2n+1}(2n + 1)AP \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{2n - r}{r - 1} A^{2n-2r} P^{r-1},$$

e cominciamò coll'osservare che la somma dei coefficienti del polinomio $f(A^2)$, rappresentato dalla sommatoria, è zero: cioè

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \binom{2n - r}{r - 1} = 0. \tag{1}$$

Infatti, ponendo nello sviluppo di M_{2n+1}, $A = x + y = 1$, $P = xy = 1$, per cui

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad y_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

risulta

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+1} = 1 - (2n + 1) \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \binom{2n - r}{r - 1}. \tag{2}$$

Ma da

$$x_1^2 - x_1 + 1 = 0, \qquad y_1^2 - y_1 + 1 = 0,$$

segue

$$S_{2r+1} = S_{2r} - S_{2r-1},$$

avendo posto

$$S_r = x_1^r + y_1^r;$$

e si ricava

$$S_0 = 2, \quad S_1 = 1, \quad S_2 = -1, \quad S_3 = -2, \quad S_4 = -1, \quad S_5 = 1.$$

Tali valori si ripetono periodicamente, sicchè, in generale

$$S_{6h} = 2, \ S_{6h+1} = 1, \ S_{6h+2} = -1, \ S_{6h+3} = -2, \ S_{6h+4} = -1, \ S_{6h+5} = 1;$$

e poichè solamente S_{6h+1}, S_{6h+5} hanno indici che possono essere primi come lo è $2n + 1$, si conclude che il primo membro della (2) è 1, ed allora dalla (2) stessa, balza la (1). Cosicchè la $f(A^2)$ è divisibile per $A^2 - P$.

Posto

$$a_r = \frac{1}{r}\binom{2n-r}{r-1}, \quad r = 1, 2, \dots, n;$$

$$b_r = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{r-1} a_r, \quad r = 1, 2, \dots, n-1,$$

il quoto di $f(A^2)$ per $A^2 - P$ è il polinomio

$$f_1(A^2) = \sum_{r=1}^{n-1} b_r A^{2(n-r-1)} P^{r-1}.$$

Ma se $n = 3h$, cioè $2n + 1$ è del tipo $6h + 1$, la somma dei coefficienti di $f_1(A^2)$ è zero, cioè

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} = 0.$$

Per provare ciò, osserviamo che

$$\begin{aligned} b_1 + \dots + b_{n-1} &= (n-1)a_1 - (n-2)a_2 + \dots + (-1)^{n-3} 2a_{n-2} + (-1)^{n-2} a_{n-1} = \\ &= n(a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-2} a_{n-1}) - (a_1 - 2a_2 + 3a_3 - \dots + (-1)^{n-2} n a_{n-1}) = \\ &= n \sum_1^n \frac{(-1)^{r-1}}{r}\binom{2n-r}{r-1} - \sum_1^n s(-1)^{s-1} a_s = - \sum_1^n (-1)^{s-1} s a_s . \end{aligned}$$

Siamo così condotti a dimostrare che, per $n = 6h + 1$, è

$$\sum_1^n (-1)^{s-1} s a_s = 0. \tag{3}$$

Per lo scopo, partendo dalla

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1},$$

si ha

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ -\binom{6h-2}{1} &= -\binom{6h-3}{1} - \binom{6h-3}{0}, \\ \binom{6h-3}{2} &= \binom{6h-4}{2} + \binom{6h-4}{1}, \\ -\binom{6h-4}{3} &= -\binom{6h-5}{3} - \binom{6h-5}{2}, \\ \binom{6h-5}{4} &= \binom{6h-6}{6} + \binom{6h-6}{3}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

dalle quali, per somma,

$$F(h) = 1 - \binom{6h-2}{1} + \binom{6h-3}{2} - \binom{6h-4}{3} + \ldots =$$

$$= \left\{1 - \binom{6h-3}{0}\right\} - \left\{\binom{6h-3}{1} - \binom{6h-4}{1}\right\} + \left\{\binom{6h-4}{2} - \binom{6h-5}{2}\right\} - \ldots =$$

$$= -1 + \binom{6h-5}{1} - \binom{6h-6}{2} + \ldots .$$

Orbene il terzo membro di questa catena di eguaglianze si deduce dal primo cambiando questo di segno e sostituendo a $6h - s$ il termine $6h - s - 3$, per $s = 2, 3, 4, \ldots$.

Reiterando si ha

$$F(h) = 1 - \binom{6(h+1)+2}{1} + \binom{6(h+1)-3}{2} - \ldots = F(h+1).$$

Poichè $F(1) = 0$ e, ammesso $F(h) = 0$, risulta dalla precedente pure $F(h+1) = 0$, si conclude ohe è vera la (3) per $n = 6h + 1$ ed $f_1(A^2)$ è divisibile per $A^2 - P$. Il quoto è

$$\sum_{r=1}^{n-2} c_r A^{2(n-r-3)} P^{r-1},$$

in cui

$$c_r = b_1 + \ldots + b_r;$$

in particolare, osservato che

$$b_{n-1} = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-2} a_{n-1} = \pm 1.$$

si ha

$$c_{n-2} = b_1 + \ldots + b_{n-2} = -b_{n-1} = \mp 1.$$

Concludendo, se $2n + 1$ è della forma $6h - 1$

(4) $$B_{2n+1} = P(A^2 - P) \sum_{r=1}^{n-1} b_r A^{2(n-r-1)} P^{r-1},$$

mentre se $2n + 1$ è della forma $6h + 1$

(5) $$B_{2n+1} = P(A^2 - P)^2 \sum_{r=1}^{n-2} c_r A^{2(n-r-2)} P^{r-1}.$$

Il teorema di Cauchy dice, in fondo, che B_{2n+1} con $n = 3h - 1$, $n = 3h$, è divisibile rispettivamente per $P(A^2 - P)$, $P(A^2 - P)^2$, e ciò dicono proprio le due ultime relazioni che danno anche i quoti delle due divisioni.

In particolare

$$B_3 = P; \quad B_5 = P(A^2 - P); \quad B_7 = P(A^2 - P)^2:$$
$$B_{11} = P(A^2 - P)(A^6 - 3A^4P + 4A^2P^2 - P^3);$$
$$B_{13} = P(A^2 - P)(A^6 - 3A^4P + 5A^2P^2 - P^3) \dots .$$

2. Colle ovvie varianti $A = D$, $P = - P$,

$$x^n - y^n = M_n', \qquad b_n' = \frac{M_n'}{D}, \qquad B_n' = \frac{b_n' - D^{n-1}}{n}.$$

ed in stretta analogia coi resultati (4), (5), per $n = 3h - 1$, $n = 3h$, si ha rispettivamente

$$B'_{2n+1} = P(D^2 + P) \sum_{r=1}^{n-1} b_r D^{2(n-r-1)} P^{r-1},$$

$$B'_{2n+1} = P(D^2 + P)^2 \sum_{r=1}^{n-2} c_r D^{2(n-r-3)} P^r.$$

In particolare

$$B_3' = P. \qquad B_5' = P(D^2 + P); \qquad B_7' = P(D^2 + P)^2: \dots .$$