Bollettino Unione Matematica Italiana

Alessandro Ossicini

Formula e serie de approssimazione asintotica delle funzioni ultrasferiche di seconda specie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.1, p. 48–53.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_48_0>

Formula e serie di approssimazione asintotica delle funzioni ultrasferiche di seconda specie.

Nota di ALESSANDRO OSSICINI (a Roma).

Sunto. - *Si determina un particolare sviluppo in serie per la funzione ultrasferica di seconda specie, da cui deduciamo una formula di approssimazione asintotica.*

1. L'integrale generale dell'equazione

$$[1]\qquad (1-x^2)y''-(2\lambda+1)xy'+n(n+2\lambda)y=0,$$

è dato da

$$y=A_1P_n^{(\lambda)}(x)+A_2Q_n^{(\lambda)}(x),$$

ove $A_i (i=1, 2)$, sono costanti arbitrarie e $P_n^{(\lambda)}(x)$ e $Q_n^{(\lambda)}(x)$ (1), rispettivamente il polinomio ultrasferico e la funzione ultrasferica di seconda specie, definite da:

$$[2]\qquad P_n^{(\lambda)}(x)=\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^m 2^{n-2m}\Gamma(n+\lambda-m)}{(n-2m)!\,m!\,\Gamma(\lambda)}x^{n-2m},$$

$$[3]\qquad Q_n^{(\lambda)}(x)=\frac{2^{n+2\lambda-1}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(2n+2\lambda+1)}(x-1)^{-n-\lambda-\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}-\lambda}F\left(n+\lambda+\frac{1}{2},\ n+1,\ 2n+2\lambda+1,\ \frac{2}{1-x}\right),$$

essendo F (2) la funzione ipergeometrica di GAUSS.

La [3] è valida per x arbitraria nel piano complesso tagliato lungo il segmento $(-1, +1)$ e per $\lambda\geq-\frac{1}{2}$, $n\geq0$ (escluso $\lambda=n=0$).

Se effettuiamo il cambiamento della variabile indipendente x e della funzione y dato dalle formule

$$[4]\qquad t=(x-\sqrt{x^2-1})^2,$$

$$[5]\qquad y=t^{\frac{1}{2}(n+2\lambda)}u,$$

(1) Cfr. A. OSSICINI, *Sulle funzioni ultrasferiche di seconda specie*; « Bollettino Unione Matematica Italiana ». (3), 6 (1951), pp. 311-315.

(2) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*; parte prima, seconda edizione. (Bologna 1948), p. 146.

la [1] diventa

$$[6] \quad t(1-t)\frac{d^2u}{dt^2} + \{(n+2\lambda-1) - t(n+3\lambda-1\}\frac{du}{dt} - \lambda(n+2\lambda)u = 0.$$

Per $\alpha = \lambda$, $\beta = n + 2\lambda$, $\gamma = n + \lambda + 1$, la [6] si riduce all'equazione ipergeometrica

$$t(1-t)\frac{d^2u}{dt^2} + \{\gamma - t(\alpha+\beta-1)\}\frac{du}{dt} - \alpha\beta u = 0$$

che ha per integrale generale

$$u = B_1 \quad F(\alpha, \beta, \gamma, t) + B_2 t^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \quad \beta+1-\gamma, 2-\gamma, t) \text{ (}^3\text{)},$$

con $B_i (i = 1, 2)$, costanti arbitrarie; si ha dunque come integrale dell'equazione [1]:

$$[7] \quad y = C_1 t^{-\frac{n}{2}}F(\lambda, -n, 1-n-\lambda, t) + C_2 t^{\frac{1}{2}(n+2\lambda)}F(\lambda, n+2\lambda, n+\lambda+1, t),$$

con $C_i (i = 1, 2)$, costanti arbitrarie.

La $t^{-\frac{n}{2}}F(\lambda, -n, 1-n-\lambda, t)$ è un'espressione in termini finiti e quindi ci dà a meno di una costante moltiplicativa $P_n^{(\lambda)}(x)$; ne segue

$$[8] \quad Q_n^{(\lambda)}(x) = K t^{\frac{1}{2}(n+2\lambda)}F(\lambda, n+2\lambda, n+\lambda+1, t).$$

La costante K si determina confrontando le [3], [8].

Se infatti supponiamo $|x|$ grande, il termine principale nella [8] ha l'espressione

$$K\frac{1}{(2x)^{n+2\lambda}},$$

e nella [3]

$$\frac{2^{n+2\lambda-1}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(2n+2\lambda+1)} \cdot \frac{1}{x^{n+2\lambda}};$$

quindi

$$[9] \quad K = \frac{2^{2n+4\lambda-1}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(2n+2\lambda+1)},$$

e se poi teniamo conto della formula di duplicazione del Le-

(3) Cfr. G. Sansone, loc. cit. (2), p. 147.

GENDRE [4]

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z),$$

la [9] diviene

$$k=\frac{\pi\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+\lambda+1)},$$

così che si ha la formula

$$[10]\qquad Q_n^{(\lambda)}(x)=\frac{\pi\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+\lambda+1)}z^{-(n+2\lambda)}F\left(\lambda,\ n+2\lambda,\ n+\lambda+1,\ \frac{1}{z^2}\right),$$

ove $z=x+\sqrt{x^2-1}$.

Usando la relazione

$$F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\gamma-\beta-1}F\left(\beta-\gamma+1,\ 1-\alpha,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{1-x}\right),\ [5]$$

abbiamo anche

$$[11]\qquad Q_n^{(\lambda)}(x)=\frac{\pi\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+\lambda+1)}\frac{z^{-n}}{(z^2-1)^{\lambda}}F\left(\lambda,\ 1-\lambda,\ n+\lambda+1.\ \frac{1}{1-z^2}\right).$$

La [11] è convergente quando $|1-z^2|>1$.

Se teniamo conto della formula di EULERO

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)=\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}du.$$

$$|x|<1,\qquad \gamma>\beta>0,$$

perveniamo per la [11] alla relazione integrale [6]:

$$[12]\qquad Q_n^{(\lambda)}(x)=\frac{\pi}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)}\frac{z^{-n}}{(z^2-1)^{\lambda}}\int_0^1 u^{-\lambda}(1-u)^{n+2\lambda-1}\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{-\lambda}du,$$

$$|1-z^2|>1,\qquad 0<\lambda<1.$$

(4) Cfr. G. SANSONE *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*; volume primo. (Padova 1950), p. 186.

(5) Cfr. G. SANSONE, loc. cit. (4). Volume secondo. (Padova 1949), p. 64.

(6) Per $\lambda=\frac{1}{2}$ le [11], [12] danno le formule relative alla funzione di LEGENDRE di seconda specie.

Cfr. E. W. HOBSON. *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics.* (Cambridge 1931), p. 66.

Usando la relazione dei complementi per la funzione Γ (7)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z},$$

la [12] può scriversi:

$$Q_n^{(\lambda)}(x)=\operatorname{sen}\pi\lambda\,\frac{z^{-n}}{(z^2-1)^\lambda}\int_0^1 u^{-\lambda}(1-u)^{n+2\lambda-1}\left(1+\frac{u}{z^2-1}\right)^{-\lambda}du.$$

2. Nel caso in cui x è reale e compreso tra ∓ 1, $Q_n^{(\lambda)}(x)$ si esprime per mezzo della relazione

$$[13]\quad (-1)^{E\left(\lambda-\frac{\pi}{2}\right)}Q_n^{(\lambda)}(\cos\Theta)=\frac{1}{2}\left\{e^{-i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}Q_n^{(\lambda)}(\cos\Theta+0i)+\right.$$
$$\left.+e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}Q_n^{(\lambda)}(\cos\Theta-0i)\right\},\ (8)$$

ove il simbolo $E\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)$ indica la parte intera di $\lambda-\frac{1}{2}$.

Ora per [11]

$$Q_n^{(\lambda)}(\cos\Theta\pm 0i)=\frac{\pi\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+\lambda+1)}\,\frac{e^{\mp i(n+\lambda)\mp i\lambda\frac{\pi}{2}}}{(2\operatorname{sen}\Theta)^\lambda}\cdot$$
$$\cdot F\left(\lambda,\ 1-\lambda,\ n+\lambda+1,\ \frac{-e^{\mp i\Theta}}{2e^{\pm i\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\Theta}\right)=$$
$$=\frac{\pi\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+\lambda+1)}\cdot\frac{e^{\mp i(n+\lambda)\mp i\lambda\frac{\pi}{2}}}{(2\operatorname{sen}\Theta)^\lambda}\cdot\left\{1-\frac{1^2-(2\lambda-1)^2}{2\cdot 2\cdot(n+\lambda+1)}\,\frac{e^{\mp i\left(\Theta+\frac{\pi}{2}\right)}}{2\operatorname{sen}\Theta}+\right.$$
$$+\frac{[1^2-(2\lambda-1)^2][3^2-(2\lambda-1)^2]}{2^2\cdot 2\cdot 4(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)}\,\frac{e^{\mp 2i\left(\Theta+\frac{\pi}{2}\right)}}{(2\sin\Theta)^2}-$$
$$-\frac{[1^2-(2\lambda-1)^2][3^2-(2\lambda-1)^2][5^2-(2\lambda-1)^2]}{2^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)(n+\lambda+3)}\cdot$$
$$\left.\cdot\frac{e^{\mp 3i\left(\Theta+\frac{\pi}{2}\right)}}{(2\operatorname{sen}\Theta)^3}+\cdots\right\},$$

(7) Cfr. G. Sansone, loc. cit., (4), p. 185.
(8) Cfr. A. Ossicini, loc. cit (1), p. 314.

e infine per la [13] ne segue che

$$Q_n^{(\lambda)}(\cos\Theta) = \frac{(-1)^{E\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}\pi\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+\lambda+1)}\left\{\frac{\cos\left[(n+\lambda)\Theta+\frac{\pi}{2}(1-\lambda)\right]}{(2\,\mathrm{sen}\,\Theta)^{\lambda}} -\right.$$

$$-\frac{1^2-(2\lambda-1)^2}{2\cdot 2(n+\lambda+1)}\frac{\cos\left[(n+\lambda+1)\Theta+\frac{\pi}{2}(2-\lambda)\right]}{(2\,\mathrm{sen}\,\Theta)^{\lambda+1}} +$$

[14]
$$+\frac{[1^2-(2\lambda-1)^2][3^2-(2\lambda-1)^2]}{2^2\cdot 2\cdot 4\cdot(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)}\frac{\cos\left[(n+\lambda+2)\Theta+\frac{\pi}{2}(3-\lambda)\right]}{(2\,\mathrm{sen}\,\Theta)^{\lambda+2}} -$$

$$-\frac{[1^2-(2\lambda-1)^2][3^2-(2\lambda-1)^2][5^2-(2\lambda-1)^2]}{2^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)(n+\lambda+3)}\cdot$$

$$\left.\frac{\cos\left[(n+\lambda+3)\Theta+\frac{\pi}{2}(5-\lambda)\right]}{(2\,\mathrm{sen}\,\Theta)^{\lambda+3}} + \ldots\right\}.$$

La serie [14] è convergente per $\pi/6 < \Theta < 5\pi/6$ e sia o no la serie convergente, per $0 < \Theta < \pi$ si dimostra per mezzo della [12], così come è nell'HOBSON (9) per le funzioni P_n^m, Q_n^m, che quando si prenda per valore approssimato di $Q_n^{(\lambda)}(\cos\Theta)$ la somma dei primi suoi s termini, l'errore $q_{n,s}^{(\lambda)}(\Theta)$ che si commette soddisfa alla limitazione:

$$\left|q_{n,s}^{(\lambda)}\right|(\Theta) < \frac{2^{\lambda+s}\pi\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+\lambda+1)}\cdot$$

$$\cdot\frac{[1^2-(2\lambda-1)^2][3^2-(2\lambda-1)^2]\ldots[(2s-1)^2-(2\lambda-1)^2]}{2^s 2\cdot 4\cdot 6\ldots 2s(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)\ldots(n+\lambda+s)}\frac{1}{(2\,\mathrm{sen}\,\Theta)^{\lambda+s}},$$

$$0 < \lambda < 1.$$

3. Quando n è grande rispetto a λ e Θ è compreso nell'intervallo $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$ ove ε è un numero positivo arbitrario, abbiamo dalla [14]

[15]
$$\frac{n!}{\Gamma(n+2\lambda)}Q_n^{(\lambda)}(\cos\Theta) \doteq$$

$$= \frac{(-1)^{E\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}\pi n!}{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+\lambda+1)}\left\{\frac{\cos\left[(n+\lambda)\Theta+\frac{\pi}{2}(1-\lambda)\right]}{(2\,\mathrm{sen}\,\Theta)^{\lambda}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

(9) Cfr. E. W. HOBSON, loc. cit., pp. 300-301.

impiegando la formula

$$\frac{n!}{\Gamma(n+m+1)} = \frac{1}{n^m}\left\{1 - \frac{m(m+1)}{2n}\right\} + O\left(\frac{1}{n^{m+2}}\right), \quad (^{10})$$

valida per $n > m$ ed m fisso e > 0, abbiamo

[16] $$\frac{1}{n^{2\lambda-1}} Q_n^{(\lambda)}(\cos\Theta) =$$

$$= \frac{\pi(-1)^{E\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}}{n^\lambda \Gamma(\lambda)} \frac{\cos\left[(n+\lambda)\Theta + \frac{\pi}{2}(1-\lambda)\right]}{(2\operatorname{sen}\Theta)^\lambda} + O\left(\frac{1}{n^{\lambda+1}}\right), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Nel caso particolare $\lambda = \frac{1}{2}$, la [16] ci dà

$$Q_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\cos\Theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2n\operatorname{sen}\Theta}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\Theta + \frac{\pi}{4}\right] + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

che è la formula di HEINE ([11]) relativa alla funzione di LEGENDRE di seconda specie.