Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Sulle deformazione proiettiva delle trasformazioni puntuali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.1, p. 29–38.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_29_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Sulla deformazione proiettiva delle trasformazioni puntuali.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna).

Sunto. - *Si studiano certe corrispondenze, fra trasformazioni puntuali, che presentano varie analogie formali con le deformazioni proiettive delle superficie introdotte dal* FUBINI.

1. In questa Nota si introducono e si studiano certe corrispondenze fra due trasformazioni puntuali [1] che presentano analogie

[1] Una corrispondenza fra trasformazioni può essere anche intesa ed interpretata come corrispondenza fra le superficie rappresentative sulla V_4^6 di SEGRE (Cfr. ad es. M. VILLA, *Superficie della* V_4^6 *di* SEGRE *e relative trasformazioni puntuali,* « Mem. Acc. Sci. Bologna », (9), 9, 1942, pp. 71-72).

formali con le ben note *deformazioni* (o *applicabilità*) *proiettive* delle superficie, introdotte dal FUBINI. Quelle corrispondenze, che per la ragione predetta chiamo *deformazioni proiettive delle trasformazioni*, mi si sono presentate nello studio di alcune questioni sulle trasformazioni puntuali di cui ho detto in una Comunicazione al IV Congresso dell' U. M. I. (2). Nella presente Nota faccio uso del metodo del *riferimento mobile,* introdotto nella geometria proiettivo-differenziale da E. CARTAN (3) e poi sfruttato, per la prima volta, per le trasformazioni puntuali fra piani da O. BORŮWKA (4).

Nei nn. 2, 3 riprendo il riferimento mobile associato, per via prevalentemente analitica, ad una coppia di punti corrispondenti in una trasformazione di 1ª specie (5), dal BORŮWKA, e mostro come se ne possa mettere in luce l'essenza geometrica. Ne traggo poi alcuni risultati sugli invarianti che definiscono una trasformazione. Nel n. 4, data la definizione di deformazione proiettiva, ne indico alcune proprietà locali e giungo al sistema di equazioni di PFAFF da cui dipende la determinazione delle trasformazioni, proiettivamente deformabili, di 1ª specie. In altra Nota, dopo aver studiato il predetto sistema, tratterò delle trasformazioni di 2ª e 3ª specie e delle trasformazioni fra spazi. Quando si presenterà l'occasione rileverò anche alcuni collegamenti con le nozioni introdotte dal BORŮWKA, di altre nozioni introdotte dal BOMPIANI e dal VILLA.

2. Siano α, β due piani proiettivi; A, A_1, A_2 tre punti *analitici* di α, B, B_1, B_2 tre altri di β (6) che definiscono nei rispettivi piani

(2) Dal titolo: *Trasformazioni puntuali e loro curve caratteristiche,* si vedano gli Atti del IV Congresso U. M. I.

(3) Mi riferirò sempre per ciò che riguarda il detto metodo alla opera: E. CARTAN, *Leçons sur la Théorie des éspaces a connexion projéctive,* Paris, (1937).

(4) O. BORŮWKA. *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs,* Iª e IIª, « Pubblications de l'Univ. Masaryk » Brno, N. 72 e N. 85 (1926-27).

(5) Per la classificazione delle trasformazioni in trasformazioni di 1ª, 2ª e 3ª specie si veda op. cit. in (4), Iª.

(6) Per *punto analitico* s'intende (Cfr. op. cit. in (3) pag 43) l'insieme delle tre coordinate proiettive omogenee di un punto *non* alterabili per un fattore comune. Ad un punto geometrico corrispondono dunque infiniti analitici.

un riferimento proiettivo; si abbia, al solito,

$$(AA_1A_2) = (BB_1B_2) = 1. \tag{1}$$

Siano

$$\begin{array}{ll} dA = \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, & dB = \tau_{00}B + \tau_1 B_1 + \tau_2 B_2 \\ dA_1 = \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2, & dB_1 = \tau_{10}B + \tau_{11}B_1 + \tau_{12}B_2 \\ dA_2 = \omega_{20}A + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2, & dB_2 = \tau_{20}B + \tau_{21}B_1 + \tau_{22}B_2 \end{array} \tag{2}$$

le *formule di* FRENET (secondo la locuzione di E. CARTAN) dei due riferimenti anzidetti. Eguagliando allo zero i covarianti bilineari dei secondi membri delle (2) si ottengono le *equazioni di struttura*:

$$\begin{gathered} \omega'_{kj} = [\omega_{k0}\omega_{0j}] + [\omega_{k1}\omega_{1j}] + [\omega_{k2}\omega_{2j}] \\ \tau'_{kj} = [\tau_{h0}\,\tau_{0j}] + [\tau_{k1}\,\tau_{1j}] + [\tau_{k2}\,\tau_{2j}] \\ (\omega_{01} = \omega_1,\ \omega_{02} = \omega_2,\ \tau_{01} = \tau_1,\ \tau_{02} = \tau_2). \end{gathered} \tag{3}$$

Consideriamo una trasformazione T del piano α nel piano β definita, in coordinate proiettive non omogenee, dalle

$$\xi = f(x, y), \qquad \eta = g(x, y), \tag{4}$$

(ξ, η coordinate in β; x, y in α). Si possono (7) far coincidere i punti analitici sopra considerati A, B con due punti, rispettivamente di α e di β, corrispondenti in T, e poi ancora fissare i punti A_1, A_2 e B_1. B_2 in modo intrinsecamente legato alla trasformazione T; dopo di ciò nelle formule (2) debbono comparire gli invarianti proiettivi fondamentali della T, in virtù di un teorema fondamentale di E. CARTAN (8). Ciò è stato fatto dal BORŮWKA (9) col procedimento *rapido* fondato sul *Lemma di* CARTAN (10); com' è noto da quel procedimento non risulta il significato geometrico delle operazioni che si eseguiscono.

Mostrerò ora quali *sviluppi locali* della (4) vadano associati al riferimento mobile di BORŮWKA, nel caso di una trasformazione di 1ª specie; questo permette di assegnare un significato geometrico agli invarianti trovati da quell'Autore se si sfruttano i risultati ottenuti nei lavori di BOMPIANI, VILLA e ROLLERO (11). Per ciò

(7) Cfr. op. cit. in (4), Iª, pagg. 6-18.

(8) Op. cit. in (3) pag. 85.

(9) In uno degli infiniti modi possibili.

(10) Cfr. op. cit. in (3) pag. 117 e pag. 145 (Remarque).

(11) E. BOMPIANI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi*, « Atti R. Acc. Italia, Mem. Cl. Sci. Fis. », V. 13, f. 10, pagg. 837-848 (1942).

che voglio ottenere mi servo di un procedimento dovuto a E. CARTAN e da esso adoperato per analoghe questioni ([12]); adopererò anche, per comodità del lettore, le stesse notazioni di BORŮWKA.

Fissati i riferimenti, BORŮWKA ottiene:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&\omega_1=\tau_1,\quad \omega_2=\tau_2,\quad \omega_{00}=\tau_{00},\quad \omega_{11}=\tau_{11},\quad \omega_{22}=\tau_{22}\\
&\omega_{21}-\tau_{21}=\omega_2,\quad \omega_{12}-\tau_{12}=\omega_1,\quad \omega_{10}-\tau_{10}=g\omega_2,\quad \omega_{20}-\tau_{20}=g\omega_1 \ ^{(13)}
\end{aligned}
$$

$$
(5')\quad
\begin{aligned}
&\omega_{22}=q_1\omega_1+p_2\omega_2,\quad \omega_{21}=3q_2\omega_1-\left(p-\frac{1}{2}\overline{g+1}\right)\omega_2,\quad \omega_{20}=v_1\omega_1+w_2\omega_2\\
&\omega_{11}=p_1\omega_1+q_2\omega_2,\quad \omega_{12}=\left(p+\frac{1}{2}\overline{g+1}\right)\omega_1+3q_1\omega_2,\quad \omega_{10}=w_1\omega_1+v_2\omega_2\\
&dg=(w_2+3g\,\overline{p_1-q_1})\omega_1+(w_1+3g\,\overline{p_2-q_2})\omega_2 .
\end{aligned}
$$

I dieci invarianti fondamentali p_1, p_2, q_1, q_2, p, g, w_1, w_2, v_1, v_2, sono poi legati da sette relazioni ([14]) che derivano dalle (3) e che però qui non scrivo. Conformemente al metodo di CARTAN, a cui ho alluso sopra, scriviamo le relazioni che esprimono che i punti P e Q, rispettivamente di α e β e aventi coordinate non omogenee x, y e ξ, η nei riferimenti mobili, sono fissi nei piani α e β. Avremo

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
&dx+\omega_1+x(\omega_{11}-\omega_{00})+y\omega_{21}-x^2\omega_{10}-xy\omega_{20}=0\\
&dy+\omega_2+x\omega_{12}+y(\omega_{22}-\omega_{00})-xy\omega_{10}-y^2\omega_{20}=0\\
&d\xi+\tau_1+\xi(\tau_{11}-\tau_{00})+\eta\tau_{21}-\xi^2\tau_{10}-\xi\eta\tau_{20}=0\\
&d\eta+\tau_2+\xi\tau_{12}+\eta(\tau_{22}-\tau_{00})-\xi\tau_{10}-\eta^2\tau_{20}=0
\end{aligned}
$$

Siano poi P e Q corrispondenti in T e siano

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
&\xi=f(x,y)=a_{10}x+a_{01}y+\Sigma\, a_{ij}x^iy^j\\
&\eta=g(x,y)=b_{10}x+b_{01}y+\Sigma\, b_{ij}x^iy^j
\end{aligned}
\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots)
$$

gli sviluppi locali delle ξ, η. Se si imprime uno spostamento infinitesimo ai riferimenti mobili, tenendo però fissi P e Q, debbono

M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*, II. *Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci*, « Rend. Lincei, (8) 4, 1948, pagg. 192-196. A. ROLLERO, *Un nuovo riferimento intrinseco per le trasformazioni puntuali fra piani proiettivi*, « Rend. Lincei, (8) 6, pagg. 213-216.

([12]) Cfr. op. cit. in ([3]) oppure E. CARTAN, *Sur un problème du Calcul des variations en Géometrie projective plane*, « Réc. Math. de Moscou », XXXIV, 3-4, 1927, pagg. 349-64.

([13]) Op. cit. in ([4]) pag. 18.

([14]) Relazioni quadratiche esterne derivate delle (5) e (5′).

essere verificate le relazioni

$$
\tag{8}
\begin{aligned}
d\xi &= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + d_0 f \\
d\eta &= \frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy + d^0 g
\end{aligned}
$$

dove $d_0 f$, $d_0 g$ indicano i termini che contengono i differenziali dei coefficienti a_{ij}, b_{ij}. Moltiplicando le due prime delle (6) per $-\frac{\partial f}{\partial x}$, $-\frac{\partial f}{\partial y}$ e aggiungendo alla terza e poi moltiplicando quella stessa per $-\frac{\partial g}{\partial x}$, $-\frac{\partial g}{\partial y}$ e aggiungendo alla quarta si ottengono relazioni che identificate allo zero, tenuto conto delle (5) e (5′), permettono di determinare le a_{ij}, b_{ij}.

Lasciamo al lettore di eseguire i calcoli che non presentano difficoltà e permettono però di rendersi conto degli ordini degli intorni di una coppia di T che intervengono successivamente nella determinazione dei riferimenti intrinseci secondo Bor̊uvka. In definitiva si perviene ai seguenti sviluppi locali, fino al 3° ordine,

$$
\tag{9}
\begin{aligned}
\xi &= x - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}q_2 x^3 + \frac{1}{2}\left[p + \frac{1}{2}\overline{g+1} + g\right]x^2 y + \frac{3}{2}q_1 x y^2 + \frac{1}{2}p_2 y^3 + [4] \\
\eta &= y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}p_1 x^3 + \frac{3}{2}q_2 x^2 y - \frac{1}{2}\left[p - \frac{1}{2}\overline{g+1} - g\right]x y^2 - \frac{1}{2}q_1 y^3 + [4].
\end{aligned}
$$

3. Le formule (9) mostrano che l'intorno del 3° ordine di una trasformazione di 1ª specie è determinato dai sei invarianti p_1, p_2, q_1, q_2, p, g. D'altra parte si verifica senza difficoltà che se due trasformazioni T, $\overline{T}$ sono tali che i sei predetti invarianti sono per esse eguali, anche i rimanenti quattro lo sono. Ciò risulta dalle relazioni quadratiche esterne a cui ho accennato in [14]. Abbiamo così che:

Se due trasformazioni di 1ª specie si possono mettere in corrispondenza in modo tale che gli intorni del 3° ordine di due coppie corrispondenti siano omografici allora le due trasformazioni sono esse stesse omografiche [15].

Ora vogliamo determinare, dovendo servircene in seguito, quelle trasformazioni per cui si ha

$$
\tag{10}
p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = p = 0.
$$

[15] Com'è noto, due trasformazioni si dicono *omografiche* se si possono far coincidere mediante due omografie, l'una cioè fra i primi piani e l'altra fra i secondi piani delle due trasformazioni. Ciò va tenuto presente anche per il seguito.

Si verifica subito che, quando sussistono le (10), è

$$\omega'_1 = 0, \qquad \omega'_2 = 0$$

e perciò ω_1 ed ω_2 sono differenziali esatti; poniamo allora

$$\omega_1 = du, \qquad \omega_2 = dv. \tag{11}$$

Osserviamo ancora che, sussistendo le (10), le relazioni quadratiche esterne derivate dalle (5′) forniscono

$$v_1 = v_2 = \frac{1}{4}(g+1)^2, \qquad w_1 = w_2 = 0\,;$$

l' ultima della (5′) mostra poi che $dg = 0$, ossia che g è una costante. Le formule (2) forniscono poi

$$\begin{gathered} A^u = A_1, \quad A^v = A_2 \text{ [16]} \\ A^{uu} = \frac{1}{2}(g+1)A^v, \quad A^{uv} = \frac{1}{4}(g+1)^2 A, \quad A^{vv} = \frac{1}{2}(g+1)A^u \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} B^u = B_1, \quad B^v = B_2 \\ B^{uu} = \frac{1}{2}(g-1)B^v, \quad B^{uv} = \frac{1}{4}(g-1)^2 B, \quad B^{vv} = \frac{1}{2}(g-1)B^u. \end{gathered} \tag{12′}$$

Le equazioni (12), (12′) si integrano subito; si deve però distinguere il caso in cui sia $g = \pm 1$. Se, in primo luogo è $g \neq \pm 1$, allora gli integrali generali delle (12) e (12′) sono:

$$A = C_1 e^{\alpha(u-v)} + C_2 e^{\alpha(\varepsilon u - \varepsilon^2 v)} + C_3 e^{\alpha(\varepsilon^2 u - \varepsilon v)}$$

dove C_1, C_2, C_3 sono costanti di integrazione, $\alpha = \frac{1}{2}(g+1)$ ed $\varepsilon^3 = 1$;

$$B = \Gamma_1 e^{\beta(u-v)} + \Gamma_2 e^{\beta(\varepsilon u - \varepsilon^2 v)} + \Gamma_3 e^{\beta(\varepsilon^2 u - \varepsilon v)}$$

dove Γ_1, Γ_2, Γ_3 sono altre costanti e $\beta = \frac{1}{2}(g-1)$. Eliminando i parametri u, v si ottengono le equazioni

$$\xi = x^k, \qquad \eta = y^k \qquad \left(k = \frac{g+1}{g-1}\right) \tag{13}$$

Nel caso in cui sia $g = \pm 1$, si può supporre che sia $g = 1$ data la forma delle equazioni (12), (12′), e si ricava

$$\begin{aligned} A &= C_1 e^{u-v} + C_2 e^{\varepsilon u - \varepsilon^2 v} + C_3 e^{\varepsilon^2 u - \varepsilon v} \\ B &= \Gamma_1 u + \Gamma_2 v + \Gamma_3\,; \end{aligned}$$

[16] Indichiamo con A^u la derivata parziale $\frac{\partial A}{\partial u}$, ecc.

e poi eliminando u, v:

$$\xi = \log x, \qquad \eta = \log y. \tag{14}$$

Si osserverà che le trasformazioni quadratiche a punti fondamentali tutti distinti si ottengono per $g = 0$ (Cfr. le (13)); il verificarsi delle (10) insieme con $g = 0$ caratterizza le trasformazioni quadratiche.

4. Consideriamo ora due trasformazioni puntuali, l'una fra i piani α, β e l'altra fra i piani $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$; siano A, B due punti corrispondenti nella prima ed $\bar{A}$, $\bar{B}$ due corrispondenti nella seconda. Supponiamo che fra le due trasformazioni interceda una corrispondenza Δ (che non consista di una omografia fra α ed $\bar{\alpha}$, ed un'altra fra β e $\bar{\beta}$); diremo che Δ è una *deformazione* (o *applicabilità*) *proiettiva* se, dette A, B ed $\bar{A}$, $\bar{B}$ due qualsiansi coppie corrispondenti in Δ, esistono due omografie, l'una di α in $\bar{\alpha}$ e e l'altra di β in $\bar{\beta}$ ohe approssimano Δ fino al 1° ordine (analitico) e in pari tempo realizzano l'eguaglianza degli intorni del 2° ordine delle due trasformazioni ed infine realizzano un contatto *geometrico* ([17]) del 2° ordine fra le curve, uscenti dai punti A, $\bar{A}$ e B, $\bar{B}$, corrispondenti in Δ e tangenti alle direzioni caratteristiche delle due trasformazioni (le quali evidentemente, per la prima delle condizioni imposte, si corrispondono in Δ).

Scegliamo un riferimento mobile per la prima trasformazione in modo da avere

$$\begin{aligned} \tau_1 = \omega_1, \ \tau_2 &= \omega_2 \\ \tau_{21} - \omega_{21} &= a\omega_1 + b\omega_2 \\ \tau_{11} - \tau_{00} - \omega_{11} + \omega_{00} &= c\omega_1 + a\omega_2 \\ \tau_{22} - \tau_{00} - \omega_{22} + \omega_{00} &= \alpha\omega_1 + \gamma\omega_2 \\ \tau_{12} - \omega_{12} &= \beta\omega_1 + \alpha\omega_2 \,; \end{aligned} \tag{15}$$

l'equazione delle curve caratteristiche è allora

$$\beta\omega_1^3 - (c - 2\alpha)\omega_1^2\omega_2 + (\gamma - 2a)\omega_1\omega_2^2 - b\omega_2^3 = 0. \tag{15}$$

Scegliamo per la seconda trasformazione il riferimento mobile trasformato di quello scelto per la prima in una coppia di omografie che realizzano l'eguaglianza degli intorni del 2° ordine delle origini dei riferimenti. È facile vedere che allora si ha per

([17]) Si dimostra (e ciò risulterà dal seguito) che esigere un contatto *analitico* implicherebbe la uguaglianza omografica delle due trasformazioni.

la seconda trasformazione

$$
(16) \qquad
\begin{aligned}
T_1 = \Omega_1 = \omega_1, \quad T_2 = \Omega_2 = \omega_2 \ \text{[18]} \\
T_{21} - \Omega_{21} = a\Omega_1 + b\Omega_2 \\
T_{11} - T_{00} - \Omega_{11} + \Omega_{00} = c\Omega_1 + a\Omega_2 \\
T_{22} - T_{00} - \Omega_{22} + \Omega_{00} = \alpha\Omega_1 + \gamma\Omega_2 \\
T_{12} - \Omega_{12} = \beta\Omega_1 + \alpha\Omega_2
\end{aligned}
$$

e l' equazione delle curve caratteristiche è la stessa di prima. Ora dobbiamo imporre alle due trasformazioni l' ulteriore condizione di cui s' è detto al principio di questo n.; ragionando al modo ormai classico per le superficie [19] si ha che, detti

$$\overline{A}' = \overline{A} + d\overline{A} + \frac{1}{2} d^2\overline{A}, \quad \overline{B}' = \overline{B} + d\overline{B} + \frac{1}{2} d^2\overline{B}$$

$$A' = A + dA + \frac{1}{2} d^2A, \quad B' = B + dB + \frac{1}{2} d^2A$$

due punti infinitamente vicini del 2° ordine ai punti $\overline{A}$, $\overline{B}$ e due ai punti A e B, sulle curve caratteristiche uscenti da essi, debbono coincidere (o meno di una omografia) i punti $\overline{A}'$ ed A' e i punti $\overline{B}'$ e B'. Perciò dovrà essere, riferendo i punti ai riferimenti scelti poco sopra

$$\overline{A} = A, \quad \overline{B} = B$$

$$d\overline{A} = dA, \quad d\overline{B} = dB$$

$$d^2\overline{A} = d\,A + \rho_1 dA + \rho_2 A, \quad d^2\overline{B} = d^2B + \sigma_1 dB + \sigma_2 B \ \text{[20]}$$

Usufruendo delle (15) e (16), dopo aver eliminato le quantità ausiliarie si ha che deve essere

$$(17) \quad \omega_2^2(\omega_{21} - \Omega_{21}) - \omega_1\omega_2(\omega_{22} - \Omega_{22} - \omega_{11} + \Omega_{11}) - \omega_1^2(\omega_{12} - \Omega_{12}) = 0$$

quando ω_1, ω_2 soddisfano alla (15′) e così pure:

$$\omega_2^2(\tau_{21} - T_{21}) - \omega_1\omega_2(\tau_{22} - T_{22} - \tau_{11} + T_{11}) - \omega_1^2(\tau_{12} - T_{12}) = 0$$

[18] Le Ω_{ij}, T_{ij} sono le quantità analoghe alle ω_{ij}, τ_{ij} ma relative alla seconda trasformazione. Indicheremo, come prima abbiamo indicato, con A, B due punti corrispondenti nella prima trasformazione ed useremo lettere sopralineate per la seconda.

[19] Cfr. E. Cartan, *Sur la déformation projective des surfaces*, « Annales Ec. Normale Sup. », Paris, (3) 37, 1920, pagg. 259-356.

[20] Si veda per il significato dei simboli l' op. cit. in [19]. Si veda anche G. Fubini, *Applicabilità proiettiva di due superficie*, « Rend. Circ. Mat. Palermo » (41), 1916, pagg. 135-162.

si vede però subito che quest'ultima è soddisfatta quando lo sia la precedente (17). Ora le relazioni $\omega_1 = \Omega_1$, $\omega_2 = \Omega_2$ forniscono per derivazione esterna

$$(18)\qquad \begin{aligned} \Omega_{21} - \omega_{21} &= l\omega_1 + m\omega_2 \\ \Omega_{11} - \omega_{11} - \Omega_{00} + \omega_{00} &= n\omega_1 + l\omega_2 \\ \Omega_{22} - \omega_{22} - \Omega_{00} + \omega_{00} &= \lambda\omega_1 + \nu\omega_2 \\ \Omega_{12} - \omega_{12} &= \mu\omega_1 + \lambda\omega_2 \end{aligned}$$

sicchè la (17) diventa

$$(19)\qquad \mu\omega_1^3 - (n - 2\lambda)\omega_1^2\omega_2 + (\nu - 2l)\omega_1\omega_2^2 - m\omega_2^3 = 0.$$

Dovrà dunque essere:

$$(20)\qquad \mu = k\beta, \quad n - kc = 2(\lambda - k\alpha), \quad \nu - h\gamma = 2(l - ka), \quad m = kb$$

dove k è un opportuno fattore di proporzionalità. Si vede poi facilmente che le quantità l e λ possono essere rese nulle spostando opportunamente i punti $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ e $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$; in definitiva, usufruendo delle (15), (16) e (20) si ha

$$(21)\qquad \begin{aligned} \Omega_{21} - \omega_{21} - k(\tau_{21} - \omega_{21} - a\omega_1) &= 0 \\ \Omega_{11} - \omega_{11} - \Omega_{00} - \omega_{00} - k(\tau_{11} - \omega_{11} - \tau_{00} + \omega_{00} - 2\alpha\omega_1 - a\omega_2) &= 0 \\ \Omega_{22} - \omega_{22} - \Omega_{00} + \omega_{00} - k(\tau_{22} - \omega_{22} - \tau_{00} + \omega_{00} - \alpha\omega_1 - 2a\omega_2) &= 0 \\ \Omega_{12} - \omega_{12} - k(\tau_{12} - \omega_{12} - \alpha\omega_1) &= 0. \end{aligned}$$

Queste equazioni, insieme con le (15) e (16), definiscono le trasformazioni proiettivamente deformabili; possiamo però semplificarle.

Scegliamo intanto il riferimento mobile per la prima trasformazione in modo che sia $\alpha = \gamma = a = c = 0$, $\beta = b = 1$, il sistema (21) diventa:

$$(21')\qquad \begin{aligned} &\Omega_{11} = \omega_{11}, \quad \Omega_{22} = \omega_{22}, \quad \Omega_{00} = \Omega_{00} \\ &\Omega_{21} = \omega_{21} + k\omega_1, \quad \Omega_{12} = \omega_{12} + k\omega_1; \end{aligned}$$

lo studio delle deformazioni proiettivamente deformabili, di 1ª specie, consiste ora nello studio del sistema (21'). Aggiungiamo ora alcune osservazioni. Se scegliamo per la prima trasformazione il riferimento intrinseco (legato all'intorno del 3° ordine) determinato da BORŮWKA e di cui s'è detto nel n. 1 si può vedere senza difficoltà [21] che in virtù delle (21') il riferimento mobile per la seconda trasformazione è esso pure intrinseco e legato all'intorno del 3° ordine. Ne risulta poi che gli invarianti p_1, p_2, q_1, q_2, p del n. 1 debbono essere eguali per le due trasformazioni. Si verifica come

[21] Basta sfruttare le relazioni derivate esterne delle (21').

si fa per le superficie in op. cit. in [19], che la forma differenziale fratta

$$\Phi = \frac{p_1\omega_1^4 + 4q_2\omega_1^3\omega_2 - 2p\omega_1^2\omega_2^2 - 4q_1\omega_1\omega_2^3 - p_2\omega_2^4}{\omega_1^3 - \omega_2^3} \tag{22}$$

è conservata da una deformazione proiettiva e viceversa, pertanto può essere assunta come *elemento lineare proiettivo* della trasformazione puntuale. Il denominatore eguagliato allo zero fornisce le direzioni caratteristiche della trasformazione, mentre il numeratore fornisce una quaterna di *direzioni di iperosculazione*, intrinsecamente associata alla trasformazione [22].

Non insisto sulla caratterizzazione geometrica della predetta quaterna di direzioui. Osserverò solo che esse sono indeterminate (ossia il numeratore di Φ svanisce identicamente) per le trasformazioni del n. 2 e per quelle soltanto.