BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCESCO G. TRICOMI

La seconda soluzione dell'equazione di Laguerre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.1, p. 1–4.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_1_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

La seconda soluzione dell'equazione di Laguerre.

Nota di FRANCESCO G. TRICOMI (a Torino).

Sunto. - *Si fa vedere come la seconda soluzione dell'equazione differenziale (di 2º ordine) cui soddisfano i polinomi di* LAGUERRE *sia esprimibile, in termini finiti, mediante la funzione gamma incompleta.*

1. L'equazione differenziale di LAGUERRE

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + \lambda y = 0, \tag{1}$$

ch'è sostanzialmente identica all'equazione canonica delle funzioni ipergeometriche confluenti (in cui si pone $\alpha + 1 = c$, $\lambda = -a$), ammette notoriamente una soluzione regolare nell'origine e soddisfacente a certe limitazioni di crescenza per $x \to +\infty$, allora e solo allora che λ coincide con un numero intero $n \geq 0$ (¹). E questo risultato è, come si sa, molto importante per la Fisica atomica perchè, in ultima analisi, da esso dipende il fatto che l'idrogeno e altri gas emettono normalmente uno spettro di righe.

Quando questa condizione $\lambda = n$ è soddisfatta, l'accennata soluzione è l'n^{mo} polinomio di LAGUERRE $L_n^{(\alpha)}(x)$, di cui è ben nota l'importanza. Ma la (1) avrà anche una seconda soluzione $y_2(x)$, linearmente indipendente dalla precedente, su cui finora poco è stato detto, all'infuori del fatto ovvio che deve trattarsi di una funzione ipergeometrica confluente (²).

(¹) Vedasi p. es. le Note di PICONE e SANSONE pubblicate in questo stesso « Bollettino » [16 (1937), 205-218 e (2) 2 (1940), 193-200] in cui le accennate limitazioni di crescenza sono ridotte al minimo.

(²) Per le funzioni confluenti mi servirò quì delle stesse notazioni usate da quattro anni in qua nei miei numerosi lavori sull'argomento e adottate

In questa breve Nota mi propongo di far vedere come questa seconda soluzione possa in ogni caso esprimersi, in termini finiti, mediante la *funzione gamma incompleta* [3].

2. Prenderemo le mosse dal fatto ben noto che l'« equazione confluente » — oltre alle due fondamentali soluzioni $\Phi(a, c; x)$ e $\Psi(a, c; x)$, che si riducono entrambe, a meno di fattori costanti, ad $L_n^{(\alpha)}(x)$ quando $a = -n$, $c = \alpha + 1$, — possiede anche l'ulteriore soluzione

$$x^{1-c}\Phi(a - c + 1, 2 - c; x) = x^{-\alpha}\Phi(-n - \alpha, 1 - \alpha; x)$$

che, *purchè* α *non sia un numero intero,* è linearmente indipendente dalle due precedenti anche nel caso che qui si considera.

Poichè, per una nota formula di derivazione, si ha

$$\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^{c-a+n-1}\Phi(a, c; x)] = (c - a)^n e^{-x}x^{c-a-1}\Phi(a - n, c; x)$$

donde, per $a = -\alpha$, $c = 1 - \alpha$, segue in particolare che

$$\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^n\Phi(-\alpha, 1 - \alpha; x)] = n!\, e^{-x}\Phi(-n - \alpha, 1 - \alpha; x),$$

mentre, d'altro canto, una formula sulla funzione gamma incompleta, fornisce

$$\Phi(-\alpha, 1 - \alpha; x) = -\alpha x^{\alpha}\gamma_1(-\alpha, x) \tag{2}$$

con

$$\gamma_1(\alpha, x) = \int_0^x e^t t^{\alpha-1}dt, \qquad (\Re\alpha > 0);$$

finchè α non è intero, si può assumere come seconda soluzione dell'equazione di LAGUERRE con $\lambda = n$ la funzione

$$y_2(x) = e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^{n+\alpha}\gamma_1(-\alpha, x)]. \tag{3}$$

Facendo invece intervenire, in luogo di γ_1, *la funzione gamma incompleta modificata* γ^* — che è una trascendente intera in entrambe le variabili da cui dipende — si ha

$$y_2(x) = \frac{e^x x_{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^n\gamma^*(-\alpha, -x)]. \tag{4}$$

anche dal « Bateman Manuscript Project ». Vedasi p. es. le mie *Lezioni sulle funzioni ipergeometriche confluenti,* in corso di stampa (in litografia) presso l'editore Gheroni di Torino.

(3) Per le notazioni al riguardo vale un'osservazione analoga a quella della nota (2).

3. Le precedenti formule mostrano già come la seconda soluzione dell'equazione di LAGUERRE possa esprimersi, almeno quando α non è intero, mediante la funzione gamma incompleta. Tuttavia i precedenti risultati possono venire semplificati. Precisamente applicando alla (3) la formula di LEIBNIZ sulla derivata n^{ma} di un prodotto, dopo aver osservato che

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(e^{-x}x^{n+\alpha}) = (n-k)!\, e^{-x}x^{\alpha+k}L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x), \qquad (k=0,\ 1, \ldots,\ n,$$

e che

$$\frac{d^k}{dx^k}[\gamma_1(-\alpha,\ x)] = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(e^x x^{-\alpha-1}) = (k-1)!\, e^x x^{-\alpha-k} L_{k-1}^{(-\alpha-k)}(-x). \qquad (k=1,\ 2, \ldots),$$

soppresso inoltre un irrilevante fattore $n!$, si ha

$$(5) \qquad y_2(x) = L_n^{(\alpha)}(x)\gamma_1(-\alpha,\ x) + e^x x^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x) L_{k-1}^{(-\alpha-k)}(-x).$$

4. Resta ora da considerare il caso in cui α coincide con un numero intero m, caso in cui ci serviremo della soluzione

$$e^x\Psi(c-a,\ c\,;\ -x) = e^x\Psi(n+m+1,\ m+1\,;\ -x)$$

della (1), osservando anzitutto che non è sostanzialmente restrittivo supporre $m \geq 0$ perchè la fondamentale relazione

$$\Psi(a,\ c\,;\ x) = x^{1-c}\Psi(a-c+1,\ 2-c\,;\ x)$$

ci permette di scrivere che

$$\Psi(n-m'+1,\ -m'+1\,;\ -x) = (-x)^{m'}\Psi(n+1,\ m'+1\,;\ -x),$$

facendoci così tornare ad una funzione Ψ in cui entrambi i parametri sono interi positivi.

Supponiamo dunque $m \geq 0$ e teniamo conto che, per una nota formula di derivazione, è

$$\Psi(n+m+1.\ m+1\,;\ -x) = \frac{1}{(n+1)_m}\frac{d^m}{dx^m}\Psi(n+1,\ 1\,;\ -x)$$

mentre. d'altra parte, si ha

$$(n!)^2\Psi(n+1,\ 1\,;\ -x) = \frac{d^n}{dx^n}[x^n\Psi(1,\ 1\,;\ -x)]$$

nonchè

$$\Psi(1,\ 1\,;\ -x) = e^{-x}\Gamma(0,\ -x).$$

Nel caso attuale potremo dunque porre

$$(6) \qquad y_2(x) = e^x \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}[e^{-x}x^n\Gamma(0,\ -x)]. \qquad (\alpha = m).$$

5. Anche questa formula potrebbe semplificarsi in modo analogo a quello seguito nel n. 3 ma, per brevità, sorvoliamo su ciò.

Merita invece la pena di osservare che se, nella (6), alla funzione $\Gamma(0, -x)$ si aggiunge o toglie una costante qualunque, la $y_2(x)$ si altera solo di un irrilevante addendo proporzionale alla prima soluzione $L_n^{(m)}(x)$, perchè è

$$e^x \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(e^{-x}x^n) = (m+n)!\, x^{-m} L_{m+n}^{(-m)}(x) = (-1)^m n!\, L_n^{(m)}(x).$$

Ma notoriamente si ha

$$\Gamma(0, x) = \operatorname{Ein}(x) - \log x - C,$$

dove C è la costante di EULER–MASCHERONI ed $\operatorname{Ein}(x)$ è l'*esponenzialintegrale modificato* definito dalla formula

$$\operatorname{Ein}(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t}\, dt\,;$$

quindi potremo anche porre

$$y_2(x) = e^x \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} \left\{ e^{-x}x^n[\operatorname{Ein}(-x) - \log x] \right\}, \qquad (\alpha = m).$$

L'esponenzialintegrale $\operatorname{Ein}(x)$ è, a differenza di quello ordinariamente considerato, una trascendente intera in x.