
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE PALAMÀ

**Sulle somme di K^{me} potenze e su di un
teorema relativo alle multigrade.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 7
(1952), n.1, p. 19–29.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_19_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Sulle somme di K^{me} potenze e
su di un teorema relativo alle multigrade (*).**

Nota di GIUSEPPE PALAMA (a Lecce).

Sunto. - *È contenuto nella breve introduzione che segue.*

Ci occupiamo qui di due questioni relative alle somme uguali di K^{me} potenze ed incidentalmente diamo poi un teorema relativo alle uguaglianze multigrade.

(*) Per notizie anche bibliografiche, relative alle multigrade, cfr. ad es. G. PALAMA, *Saggio di una nuova trattazione delle multigrade*, « Boll. dell'Un. Mat. It. », Serie III, Anno III, pp. 263-278.

CAP. I.

Somme uguali di K^{me} potenze.

1. Innanzi tutto ricordiamo il significato di due simboli già usati da altri Autori e introduciamo due altri nuovi.

Indichiamo con $\beta = \beta(k)$, $\gamma = \gamma(k)$ il più piccolo valore di n tale che la

$$(1) \quad x_1^k + \dots + x_n^k = y_1^k + \dots + y_m^k, \quad (m < n),$$

con

$$(2) \quad (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 1,$$

e

$$x_i, y_i \text{ interi e } > 0,$$

ha rispettivamente una o infinite soluzioni non banali.

È evidente che a (2) può sempre soddisfare una qualunque soluzione di (1) dividendola per un conveniente divisore e che è

$$\beta(k) \leq \gamma(k).$$

Attribuiamo poi agli stessi simboli, ma con un apice, significati analoghi. si riferiscono essi però al caso in cui nella (1) è $m < n - 1$. Si ha perciò.

$$\beta(k) \leq \beta'(k), \quad \gamma(k) \leq \gamma'(k).$$

2. Si abbia la

$$(3) \quad a_1, \dots, a_p \stackrel{n}{=} b_1, \dots, b_p$$

e si vogliano determinare k ed h in modo che sia identicamente

$$(4) \quad (ka_1 + h)^{n+2} + \dots + (ka_p + h)^{n+2} = \\ = (kb_1 + h)^{n+2} + \dots + (kb_p + h)^{n+2} + (kA_1)^{n+2} + \dots + (kA_m)^{n+2},$$

essendo A_i interi arbitrari.

La (4) è identicamente soddisfatta per

$$(5) \quad kD_{n+2} + (n+2)hD_{n+1} = kA,$$

ove

$$D_i = a_1^i + \dots + a_p^i - b_1^i - \dots - b_p^i, \\ A = A_1^{n+2} + \dots + A_m^{n+2}$$

Diciamo la D_i differenza d'indice i relativa alla (3). Talvolta però, invece di D_i , scriviamo $D_i^{(n)}$, per mettere in evidenza, quando

vi è possibilità di equivoci, l'ordine della multigrada cui si riferisce.

Poichè nella (3) si possono fare positivi i termini, se già non lo sono, e poichè si può assumere k positivo ad arbitrio e ritenere $D_{n+1} > 0$, (perchè se non lo è basta scambiare i membri di (3)), con la scelta opportuna della A_i , positive, il valore seguente di h

$$h = \frac{k(A - D_{n+2})}{(n+2)D_{n+1}},$$

che si ricava dalla (5), può farsi > 0 .

Per tanto le basi delle potenze della (4), qualunque sia la parità di n , possono rendersi positive ⁽¹⁾.

Esempio. - Dalla

$$\pm (0,5) \stackrel{3}{=} \pm (3,4),$$

per $k=5$, $m=2$, $A_1 = A_2 = 6$, risultando $h=27$, si ha la

$$2^5 + 27^5 + 27^5 + 52^5 = 7^5 + 12^5 + 30^5 + 30^5 + 42^5 + 47^5.$$

3. Notiamo che la D_{n+1} relativa alla (3) non cambia se ai termini di quest'ultima aggiungiamo un numero relativo arbitrario ⁽²⁾.

Ora poichè da (3), con il teorema di TARRY, segue

$$(6) \quad a_1, \dots, a_p, b_1 + h, \dots, b_p + h \stackrel{n+1}{=} b_1, \dots, b_p, a_1 + h, \dots, a_p + h,$$

si ha che la D_{n+2} relativa alla (6) è data da

$$(7) \quad D_{n+2}^{(n+1)} = - (n+2)hD_{n+1}^{(n)}.$$

Pertanto la ripetuta applicazione della (6), a partire da una multigrada del primo ordine. porta alla

$$D_n^{(n-1)} = \frac{1}{2}(-1)^{n-2}n!hh' \dots h^{(n-3)}D_2^{(1)},$$

in cui $h, h', \dots, h^{(n-3)}$ sono i valori di h che si introducono applicando successivamente la (6).

⁽¹⁾ Un procedimento analogo è stato seguito da E. M. WRIGHT, *On Sums of k - th powers*, « Jour. of the London Math. Society », Vol. 10, (1935), pp. 94-99.

⁽²⁾ Per questa ragione il GUTTMANN, *Universal magic squares and multigrade equations*, « Scripta Math. » Vol. XIII, (1947), pp. 187-202, disse la D_{n+1} differenza *magica*. Tali D_{n+1} sono state inoltre utilizzate da W. H. J. FUCHS e E. M. WRIGHT, in *The Easier WARING'S Problem*, « The Quart. J. of Math. Oxford Series », Vol. 10, N. 39, (Set. 1939), pp. 190-209.

Si noti che, se si attribuisce ad h nella (6) il valore

$$(8) \quad m[(n+2)D_{n+1}^{(n)}]^{n+1}k^{n+2},$$

con k, m , (arbitrari), e $D_{n+1}^{(n)}$ positivi, (od altro analogo valore), la (7) assume la forma

$$(9) \quad D_{n+2} = -mL^{n+2},$$

con $L > 0$ ed avente un fattore parametrico, (nuovo se la (3) è parametrica), arbitrario. La (6) allora ci dà un'identità del tipo

$$A_1^{n+2} + \dots + A_{2p}^{n+2} + mL^{n+2} = B_1^{n+2} + \dots + B_{2p}^{n+2},$$

con tutti positivi i termini ed il cui numero può dimezzarsi se è la (3) autocomplementare ed $m = 2q$.

Infatti la (3), se è autocomplementare ed è inoltre, ad es., $n = 2s - 1$, $p = 2r$, può ridursi alla forma

$$c_1, \dots, c_r, -c_1, \dots, -c_r \stackrel{2s-1}{=} d_1, \dots, d_r, -d_1, \dots, -d_r, \quad (c_i, d_i > 0),$$

che, applicandovi la (6) per $h = 2h'$ e sottraendovi poi da ogni termine h' , dà

$$(10) \quad \begin{array}{ccccccc} c_i - h', & -c_i - h', & d_i + h', & -d_i + h' & \stackrel{2s}{=} \\ d_i - h', & -d_i - h', & c_i + h', & -c_i + h', & (i = 1, \dots, r). \end{array}$$

Ora assunto nella (10) h' uguale alla metà di (8), (con $m = 2q$), e reso h' , con la scelta opportuna di k , maggiore di ogni c_i, d_i , i primi e gli ultimi $2r$ termini di ogni membro della (10), si possono rendere rispettivamente negativi e positivi. Pertanto dalla (10) si trae, se si tien presente la (9), (con $m = 2q$), l'identità seguente con tutti i termini positivi

$$\begin{aligned} & (d_1 + h')^{2s+1} + \dots + (d_r + h')^{2s+1} + \\ & + (-d_1 + h')^{2s+1} + \dots + (-d_r + h')^{2s+1} + qL^{2s+1} = \\ & = (c_1 + h')^{2s+1} + \dots + (c_r + h')^{2s+1} + (-c_1 + h')^{2s+1} + \dots + (-c_r + h')^{2s+1}, \end{aligned}$$

che dimostra appunto quanto si doveva.

In modo analogo si procede se la (3) è autocomplementare ed n è pari.

Ad es. applicando alla autocomplementare

$$1, 4, 5, 8 \stackrel{3}{=} 2, 2, 7, 7$$

che ha $D_4 = 2^4 \cdot 3^2$, la (6) per $h = \frac{108}{5} k^5$, (k arbitrario), si ha

$$\begin{aligned} 1, 4, 5, 8, 2 + \frac{108}{5} k^5, \quad 2 + \frac{108}{5} k^5, \quad 7 + \frac{108}{5} k^5, \quad 7 + \frac{108}{5} k^5, \\ 2, 2, 7, 7, 1 + \frac{108}{5} k^5, \quad 4 + \frac{108}{5} k^5, \quad 5 + \frac{108}{5} k^5, \quad 8 + \frac{108}{5} k^5, \end{aligned}$$

con $D_5 = -2 \cdot 6^5 K^5$, dalla quale, se si moltiplicano i suoi termini per 10 e si sottrae poi da ciascuno $45 + 108k^5$, si trae

$$\begin{aligned} 2(25 + 108k^5)^5 + 2(-25 + 108k^5)^5 + (60k^5)^5 = \\ = (35 + 108k^5)^5 + (5 + 108k^5)^5 + (-5 + 108k^5)^5 + (-35 + 108k^5)^5, \end{aligned}$$

e questa ad es. per $k = 1$, dà

$$60^5 + 83^5 + 83^5 + 133^5 + 133^5 = 73^5 + 103^5 + 113^5 + 143^5.$$

4. Alle volte però, lo si noti di passaggio, se la (3) è parametrica, è agevole stabilire i valori dei parametri in modo che la sua D_{n+1} si riduca alla forma mL^{n+1} , ed ottenere quindi identità del tipo

$$A_1^{n+1} + \dots + A_p^{n+1} = B_1^{n+1} + \dots + B_p^{n+1} + \underset{(1)}{L^{n+1}} + \dots + \underset{(m)}{L^{n+1}},$$

il cui numero di termini, una volta stabilito m , può però ridursi almeno di due.

Così per es., poichè la

$$(11) \quad D_3 = 18n(n-1),$$

relativa alla

$$(12) \quad 3, n, 3n+1 \stackrel{2}{=} 1, n+3, 3n,$$

per $n = 4$, diventa

$$D_3 = 6^3,$$

fatto $n = 4$ nella (12), ed aggiunto poi ai suoi termini successivamente

$$3, 2, -7, -13, -18,$$

si hanno rispettivamente le

$$\begin{aligned} 7^3 + 16^3 = 4^3 + 10^3 + 15^3, \quad 5^3 + 15^3 = 3^3 + 9^3 + 14^3, \quad 6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3, \\ 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3, \quad 11^3 + 17^3 = 5^3 + 14^3 + 15^3. \end{aligned}$$

5. Se indichiamo con $M(n)$ il più piccolo valore di p per cui esiste esempio numerico di (3) autocomplementare, si ha da risul-

tati noti ⁽³⁾ la seguente tabella

n	≤ 9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$M(n)$	$n + 1$	14	14	20	30	30	30	38	48	58	58	65	86	100	≤ 200

Pertanto con gli esempi noti che danno luogo alla precedente tabella, ed a mezzo di uno dei due procedimenti indicati, si hanno identità parametriche della forma

$$A_1^k + \dots + A_r^k = B_1^k + \dots + B_r^k + L_{(1)}^k + \dots + L_{(q)}^k, \quad (q \text{ arbitrario}),$$

che danno

$$\gamma(k) \leq r + 1, \quad \gamma'(k) \leq r + 2,$$

rispettivamente per $q = 1, 2$ ed r dato dalla seguente tabella

k	≤ 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
r	$k - 1$	14	14	20	30	30	30	38	48	58	58	65	86	100

Si ha pertanto quest'altra tabella

TABELLA A

k	≤ 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\gamma(k) \leq$	k	15	15	21	31	31	31	39	49	59	59	66	87	101
$\gamma'(k) \leq$	$k + 1$	16	16	22	32	32	32	40	50	60	60	67	88	102

La riga della tabella A relativa a $\gamma(k)$, coincide con altra nostra ⁽⁴⁾ ottenuta a mezzo di una formula del WRIGHT ⁽⁵⁾ e di alcuni risultati relativi alle multigrade.

Quindi le

$$\beta(10) \leq 11, \quad \beta(14) \leq 23,$$

stabilite recentemente da T. RAI ⁽⁶⁾, sono migliorate da

$$\gamma(10) \leq 10, \quad \gamma(14) \leq 21,$$

della tabella A.

⁽³⁾ Cfr. A. GLODEN, *Mergradige Gleichungen*, Groningen, (1944) p. 58.

⁽⁴⁾ G. PALAMÀ, *Contributo [dei recenti risultati delle multigrade al problema del Waring]*, « Boll. dell' Un. Mat. It. », Serie III, Anno IV, (1949), pp. 75-9.

⁽⁵⁾ Cfr. l. c. in ⁽⁴⁾.

⁽⁶⁾ RAI, T., *On a problem of additive theory of numbers*, « Math. Student », 15, (1947); 25-28, (1948).

Però si deve notare che il RAI ⁽⁷⁾ ha dimostrato anche le

$$\beta(15) \leq 24, \quad \beta(16) \leq 29,$$

mentre la tabella A, dà

$$\gamma(15) \leq 31, \quad \gamma(16) \leq 31.$$

6. Riportiamo qui delle multigrade con le quali si migliorano alcuni dei risultati della tabella A.

Le

$$5, 8, 9, 21, 22 \stackrel{k}{=} 6, 13, 19, 23, \quad (k = 2, 4, 6) \text{ } ^{(8)};$$

$$13, 16, 69, 75, 99 \stackrel{k}{=} 34, 58, 82, 98, \quad (k = 1, 3, 5, 7),$$

(essa si ottiene dalla

$$1, 25, 31, 84, 87, 134, 158, 182, 198 \stackrel{8}{=} 2, 18, 42, 66, 113, 116, 169, 175, 199,$$

di LETAC);

$$12, 16, 17, 31, 37, 41 \stackrel{k}{=} 8, 9, 11, 23, 28, 39, 40, \quad (k = 2, 4, 6, 8),$$

(si ha applicando la (6) per $h = 23$, alla nota

$$1, 5, 11, 24, 28, 30, 42, 47, 58, 59 \stackrel{8}{=} 2, 3, 14, 19, 31, 33, 37, 50, 56, 60,$$

e sottraendo poi da ogni termine 42);

$$1, 4, 7, 32, 33, 44, 47, 48 \stackrel{k}{=} 14, 26, 39, 42, 46, 49, \quad (k = 1, 3, 5, 7, 9),$$

(essa segue dalla ⁽⁹⁾)

$$1, 4, 8, 11, 24, 36, 51, 54, 57, 82, 83, 94, 97, 98 \stackrel{40}{=}$$

$$2, 3, 6, 17, 18, 43, 46, 49, 64, 76, 89, 92, 96, 99);$$

danno

$$\beta(6) \leq 5, \quad \beta(7) \leq 5, \quad \beta(8) \leq 7, \quad \beta(9) \leq 8, \quad \beta'(9) \leq 8.$$

Inoltre da note multigrade si ricava

$$\beta'(11) \leq 11 \text{ } ^{(10)}, \quad \beta'(15) \leq 24 \text{ } ^{(11)}, \quad \beta'(17) \leq 30 \text{ } ^{(12)}.$$

⁽⁷⁾ Cfr. l. c. in ⁽⁶⁾.

⁽⁸⁾ Cfr. G. PALAMÀ, *Teoremi relativi alle uguaglianze multigrade*, « Rend. di Mat. e delle sue applicaz. », fasc. III-IV, (1947).

⁽⁹⁾ Cfr. ad es. G. PALAMÀ, *Un teorema analogo a quello di Tarry. — Osservazioni su altri noti. — Applicazioni*, « Atti del Sem. Mat. e fis. dell' Univ. di Modena », Vol. II, (1947-48).

⁽¹⁰⁾ Cfr. l. c. in ⁽³⁾, p. 61.

⁽¹¹⁾ Cfr. l. c. in ⁽⁶⁾.

⁽¹²⁾ Cfr. H. GUPTA, *On Sums of Powers*, « Proc. of the Indian Ac. of Sc. », Vol. IV, (Nov. 1936), N. 5, pp. 571-74.

7. Alcuni altri risultati della tabella A sono migliorati da identità stabilite indipendentemente dalle multigrade. Così ad es. le:

$$(9a^3 + 6a^2b + 3ab^2 + b^3)^3 = \\ = b^3(6a^2 + 3ab + b^2)^3 + a^3(9a^2 + 6ab + 3b^2)^3 + (3a^2b)^3,$$

con a, b arbitrari, (i suoi termini risultano > 0 se lo sono anche a e b);

$$[m^4(m^8-1) - 2d]^4 + [m(m^8+2d-1)]^4 + [2m(m^8-1)p]^4 + [2m(m^8-1)q]^4 = \\ = [m(m^8-2d-1)]^4 + [m^4(m^8-1) + 2d]^4,$$

in cui

$$d = p^4 + q^4,$$

essendo m, p, q arbitrari ⁽¹⁴⁾;

$$417^5 + 618^5 = 56^5 + 161^5 + 184^5 + 634^5 \quad (15);$$

$$(12abcdfg)^6(k^6 + h^6) + B_1^6 + B_2^6 + B_3^6 + B_4^6 = A_1^6 + A_2^6 + A_3^6 + A_4^6,$$

in cui a, b, c, d, k, h sono interi arbitrari,

$$f = c^4 - d^4, \quad g = a^{24} - b^{24},$$

e

$$A_1, B_1 = a^5c \pm bdx; \quad A_2, B_2 = a^5d \mp bcx; \quad A_3, B_3 = b^5c \mp adx;$$

$$A_4, B_4 = b^5d \pm acx,$$

essendo

$$x = (12abcdfg)^5(k^6 + h^6) \quad (16),$$

ci danno rispettivamente, quando per la 2^a e la 3^a di esse si ritenga vera la congettura secondo cui è impossibile in interi la

$$x_1^n + \dots + x_m^n = y^n,$$

per $m < n$ ⁽¹⁷⁾,

$$\gamma'(3) = 3, \quad \gamma'(4) = 5, \quad \beta'(5) = 4, \quad \gamma'(6) \leq 6.$$

⁽¹³⁾ Cfr. DICKSON, *Hystory of the theory of Numbers*, New York, (1934). Vol. II, p. 560.

⁽¹⁴⁾ Cfr. G. PALAMÀ, *Somme uguali di biquadrati*, « Boll. dell' Un. Mat. It. », Serie III, Anno IV, (dic. 1949), N. 4, p. 420.

⁽¹⁵⁾ Cfr. A. MOESSNER, *Alcune ricerche di teoria dei numeri e problemi diversi*, « Il Boll. di Mat. », V Serie, Anno II, (1948), fasc. V-VI, pag. 38.

⁽¹⁶⁾ Tale identità deriva facilmente da altra stabilita da K. SUBBA RAO, « Jour. of London Math. Soc. », 13, (1938), pp. 14-16.

⁽¹⁷⁾ Cfr. l. c. in ⁽¹³⁾, pp. 648 e 682. Recentemente ha richiamato, ancora una volta, l'attenzione su tale congettura M. RIGNAUX, « Inter. Rech. Math. », t. 1, fasc. 2°, (1945), p. 39.

($i = 1, \dots, p$; k arbitrario che però, senza ledere la generalità, può ritenersi nullo), possono darsi due casi:

a) *Le due (13) sono autocomplementari.* In tal caso (15) e (16) coincidono con (14) e con il teor. di TARRY applicato a ciascuna delle (13);

b) *Le due (13) non sono autocomplementari.* Allora (14) coincide con il teor. di TARRY e (15) e (16) con altro analogo a quello di TARRY ⁽¹⁸⁾;

2°. *Se invece non sussiste la (17) e q, p sono uguali o distinti, allora:*

a) *Se le due (13) sono autocomplementari,* (15) e (16) coincidono con (14);

b) *Se le due (13) non sono autocomplementari,* (15) e (16) danno risultati distinti da (14).

4. ESEMPI.

Es. 1°. - Dalle

$$(18) \quad 1, 9, 12, 20 \stackrel{3}{=} 2, 6, 15, 19; \quad 1, 9, 10, 18 \stackrel{3}{=} 3, 4, 15, 16$$

autocomplementari, non soddisfacenti a (17) e di uguale D_4 , applicando la (14) per $h = -9, -1, 0$, (con $h = 11, 3, 2$ si hanno multigrade equivalenti a quelle che seguono), si ricavano rispettivamente le seguenti multigrade normali del 4° ordine

$$(19) \quad 1, 9, 11, 24, 28 \stackrel{4}{=} 3, 4, 16, 21, 29,$$

$$1, 7, 9, 18, 20 \stackrel{4}{=} 2, 4, 13, 15, 21,$$

$$(20) \quad 1, 5, 9, 17, 18 \stackrel{4}{=} 2, 3, 11, 15, 19.$$

Agli stessi risultati si perviene con la (15). Si noti la (19) che non è autocomplementare.

Invece con l'applicazione del teor. di TARRY a ciascuna delle (18) si trova l'unica (20) normale.

Es. 2°. - Le

$$(21) \quad 3, 18, 27 \stackrel{2}{=} 9, 9, 30; \quad 1, 22, 22 \stackrel{2}{=} 4, 13, 28$$

non autocomplementari e non soddisfacenti a (17) e di uguale D_3 , a mezzo della (14) per $h = -19, -4, 2, 5, 26$ danno rispettivamente le cinque seguenti multigrade normali del 3° ordine

$$\begin{aligned} \pm (1,8) \stackrel{3}{=} \pm (4,7); \quad \pm (3,11) \stackrel{3}{=} \pm (7,9); \quad \pm (1,7) \stackrel{3}{=} \pm (5,5); \\ \pm (0,5) \stackrel{3}{=} \pm (3,4); \quad \pm (7,17) \stackrel{3}{=} \pm (13,13). \end{aligned}$$

⁽¹⁸⁾ Cfr. l. c. in ⁽⁹⁾.

Invece sia la (16) che il teor. TARRY applicato a ciascuna delle (21) non ci danno multigrade normali del 3° ordine ma le quattro seguenti con cinque termini per membro

$$\begin{aligned} & -32, -32, 3, 23, 38 \stackrel{3}{=} -42, -17, 8, 8, 43; \\ & -28, -28, -3, 22, 37 \stackrel{3}{=} -38, -13, 2, 7, 42; \\ & -26, -26, 9, 14, 29 \stackrel{3}{=} -36, -1, -1, 4, 34; \\ & -17, -17, -12, 18, 28 \stackrel{3}{=} -27, -2, -2, -2, 33, \end{aligned}$$

che sono però tutte non autocomplementari.

5. Se la (3) è parametrica e se è

$$a_1^{n+1} + \dots + a_p^{n+1} \neq b_1^{n+1} + \dots + b_p^{n+1},$$

(che, se la (3) è normale, per il teor. di BASTIEN, è senz'altro verificata), allora con i valori dei parametri, e soltanto con essi, che annullano la sua D_{n+1} , la (3) diventa banale.

Così per es., poichè la (11) si annulla per $n=0$, $n=1$, soltanto per questi valori di n la (12) diventa banale.

Viceversa si ha un fattore di D_{n+1} con i valori dei parametri che rendono banale la (3), che, se è normale, si ottengono identificando ogni termine del 1° con ciascuno del 2° membro. Anzi per questa via se n non è piccolo e la (3) è parametrica e normale è più agevole determinare D_{n+1} che per di più si ottiene decomposta in fattori.