B. S. Popov

Sull'equazione di Bessel.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **7** (1952), n.1, p. 17–19.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_17_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1952.

Sull' equazione di Bessel.

Nota di B. S. Popov (a Skopje, Jugoslavia).

Sunto. - *Si ottiene una condizione necessaria e sufficiente per la riducibilità di una equazione differenziale, comprendente in particolare l'equazione di* Bessel.

La condizione che esprime che l'equazione di Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \omega^2)y = 0 \tag{1}$$

ammette soluzioni sotto forma finita è, come è noto [1],

$$2\omega = 2n + 1, \quad n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots \tag{2}$$

[1] Watson, *Theory of Bessel functions,* 1944, p. 52.

In questa nota noi ritroveremo la condizione precedente e dimostreremo il seguente risultato:

1° Affinchè l'equazione (1) sia riducibile, è necessario e sufficiente che la relazione (2) sia soddisfatta.

2° Se l'equazione (1) è riducibile, essa può essere scritta sotto la forma

$$(xD + \Phi_1) \times (x\Phi_2 D + \Phi_3)y = 0, \quad D = \frac{d}{dx},$$

con (²)

$$\Phi_1 = \mp ix - \frac{2n+1}{2}, \quad \Phi_2 = x^n \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)^k \frac{[n + 1/2, k]}{(2xi)^k}, \quad i = \sqrt{-1},$$

$$\Phi_3 = x^n \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)^k \frac{[n + 1/2, k]}{(2xi)^k} \left(\pm ix + \frac{2k+1}{2}\right),$$

ove noi abbiamo adoperato, per semplificare, il simbolo di HANKEL

$$[n + 1/2, k] \equiv \frac{[(2n+1)^2 - 1^2][(2n+1)^2 - 3^2] \dots [(2k+1)^2 - (2k-1)^2]}{2^{2k} \cdot k!}$$

$$[n + 1/2, 0] \equiv 1, \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

Infatti, consideriamo l'equazione differenziale

$$x^2 y'' + (\alpha x + \beta) x y' + (Ax^2 + Bx + C)y = 0. \tag{3}$$

che contiene l'equazione di BESSEL (1) come caso particolare. I coefficienti α, β, A, B, C, sono parametri arbitrari.

La condizione necessaria e sufficiente perchè la (3) sia riducibile è che essa possa essere messa nella forma (³)

$$\left(D + \frac{1}{x} f_1\right) \times \left(f_2 D + \frac{1}{x} f_3\right) y = 0, \tag{4}$$

dove f_i $(i = 1, 2, 3)$ sono dei polinomi.

Dal confronto delle equazioni (3) e (4), si ottengono le seguenti identità

$$\begin{aligned} x f'_2 + f_3 + f_1 f_2 &\equiv f_2(\alpha x + \beta), \\ x f'_3 - f_3 + f_1 f_3 &\equiv f_2(Ax^2 + Bx + C). \end{aligned} \tag{5}$$

(²) La funzione Φ_2 è legata alle funzioni di HANKEL di prima e seconda specie $H_k^{1,2}$ dalla relazione

$$\Phi_2 = x^n e^{\pm ix} i^{\mp(n+1)} H^{(2,1)}_{n+1/2}$$

(³) FLOQUET, *Sur la théorie des équations différentielles linéaires*, Ann. de l'Ec. Norm. IIᵉ Série, t. VIII. (1879) Suppl. 1-131.

Prendendo per i polinomi

$$f_i = \sum_{k=0}^{n+1} a_{i,k} x^{n-k+1}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$a_{2,0} = 0, \quad a_{2,1} = 1, \quad a_{1,k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2,$$

e sostituendo questi valori nelle identità (5), si ottengono le equazioni algebriche

$$(n-k+2)a_{2,k-2} + a_{1,n+1}a_{2,k-2} + a_{1,n}a_{2,k-1} + a_{3,k-1} = \alpha a_{2,k-1} + \beta \alpha_{2,k-2}$$

$$(n-k+2)a_{3,k-2} + a_{1,n+1}a_{3,k-2} + a_{1,n}a_{3,k-1} = Aa_{2,k-1} + Ba_{2,k-2} + Ca_{2,k-3}$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n+1),$$

da cui si trovano i parametri $a_{i,k}$.

Con l'eliminazione dei parametri $a_{i,k}$ si ottiene la relazione

$$(6) \qquad 2B - \alpha\beta = \sqrt{\alpha^2 - 4A}\left(2n + 1 - \sqrt{(\beta-1)^2 - 4C}\right)$$

che è il criterio di riducibilità dell'equazione (3).

Si può dunque enunciare il seguente risultato:

La condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione differenziale (3) sia riducibile è che fra le grandezze A, B, C, α, β e il numero naturale n esista la relazione (6).

Prendendo, per l'equazione di BESSEL (1),

$$\alpha = B = 0, \quad \beta = A = 1, \quad C = -\omega^2$$

si arriva ai risultati 1° e 2° ricordati in principio.

Facendo rilevare che la riducibilità della (1) porta l'integrabilità per quadrature della medesima equazione, si conclude che la condizione (2) è anche valida per l'integrabilità della equazione (1).