
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CARLO CATTANEO

**Sul legame lineare che intercorre fra le tre
forme quadratiche associate a una
superficie.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 7
(1952), n.1, p. 16–17.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_16_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1952_3_7_1_16_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sul legame lineare che intercorre fra le tre forme quadratiche associate a una superficie.

Nota di CARLO CATTANEO (a Pisa).

Sunto - *Si dà una semplice interpretazione geometrica della relazione lineare che lega le tre forme quadratiche di una superficie.*

Tra le tre forme quadratiche fondamentali di una superficie σ ,

$$(1) \quad \alpha = ds^2 = a_{hk} dx^h dx^k, \quad \beta = b_{hk} dx^h dx^k, \quad \gamma = d\lambda^2 = c_{hk} dx^h dx^k,$$

passa notoriamente il legame identico

$$(2) \quad \gamma = -K\alpha - H\beta$$

con $K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$, curvatura totale, e $H = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$, curvatura media.

Mostrerò qui della (2) un semplice significato geometrico che non ho visto esplicitamente menzionato.

1. Le curvature principali $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{\rho_2}$ di una superficie sono fornite dall'equazione di secondo grado

$$(3) \quad -\frac{1}{\rho^2} + H\frac{1}{\rho} - K = 0.$$

Può chiedersi quale sia il significato del primo membro della (3) allorchè $\frac{1}{\rho}$ rappresenti la curvatura di una sezione normale generica. Vedremo subito come questo quesito si allacci a quello, posto in precedenza, di determinare il contenuto geometrico della (2).

2. Nel generico punto P di σ consideriamo una sezione normale generica l e ivi un punto infinitamente prossimo P' . Siano n e n' le normali principali, in P e in P' , alla curva l e C il loro punto comune: $\rho = |PC|$ è il raggio di curvatura di l ; chiamiamo poi N' la normale in P' alla σ . Penseremo n , n' , N' orientate in verso concorde, ad es. verso la convessità di l . N' , pur generalmente distinta da n' , è normale a l , quindi giace nel piano normale a l in P' .

Per C , o per qualunque altro punto ausiliario, conduciamo poi tre semirette parallele e concordi, rispettivamente, a n , n' , N' chiamandone Q , T , Q' le intersezioni con la sfera di centro C e raggio

unitario: per quanto si è detto prima i vettori infinitesimi QT e TQ' sono ortogonali.

Ciò premesso, dai triangoli simili CQT , CPP' si ha anzitutto

$$(4) \quad |QT| = \frac{|PP'|}{\rho}.$$

Dal triangolo rettangolo infinitesimo QTQ' si ha poi

$$|QQ'|^2 = |QT|^2 + |TQ'|^2$$

cioè, tenuta presente la (4) e indicata con $d\chi$ la misura in radianti dell'angolo $N'n'$, infinitesimo con ds ,

$$|QQ'|^2 = \frac{|PP'|^2}{\rho^2} + d\chi^2$$

ovvero, introdotta la prima e la terza delle forme (1),

$$(5) \quad d\lambda^2 = \frac{ds^2}{\rho^2} + d\chi^2.$$

In virtù di tal relazione la (2), divisa per ds^2 , potrà a sua volta scriversi, tenuto conto che $b_{rs} \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds} = -\frac{1}{\rho}$,

$$\left(\frac{d\chi}{ds}\right)^2 = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{H}{\rho} - K.$$

Appare di qui come la relazione (2) fornisca proprio il significato geometrico del primo membro dell'equazione delle curvature principali allorchè esso viene riferito a una sezione normale generica. All'equazione (3) la (2) si riduce addirittura quando dx_λ è direzione principale: in tal caso è infatti $d\chi = 0$.