Bollettino
Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni

* Francesco Severi, Giuseppe Scorza Dragoni, Lezioni d'Analisi, vol. III, Zuffi, Bologna
* B. Segre, Arithmetical Questions on Algebraic Varieties, The Athlone Press, London, 1951 (Fabio Conforto)
* G. Y. Rainich, Mathematics of Relativity, Viley and Sons, New York, 1950 (Enrico Bompiani)
* C. J. Tranter, Integral transforms in mathematical physics, Methuen & Co., London, 1951 (Giovanni Sansone)
* H. Lebesgue, Leçons sur les constructions géométriques, Gauthier-Villars, Paris, 1950 (Beniamino Segre)
* H. Dölp, E. Netto, Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung, Töpelmann, Berlin, 1949 (Beniamino Segre)
* H. Hornich, Lehrbuch der Funktionentheorie, Springer, Wien 1950 (Beniamino Segre)
* R. König, K. H. Weise, Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie. Erster Band: Das Erdsphäroid und seine konforme Abbidungen, Springer-Verlag, Berlin, 1951 (Massimo Cimino)
* O. F.G. Schilling, The theory of valutations, American Mathematica Society, 1950 (Guido Zappa)
* È. Borel, Leçon sur la théorie des fonctions (Prinfipes de la théorie des ensambles en vue des applications à la théorie des fonctions), Quatrième édition, 1950 (Giuseppe Belardinelli)
* Ch. Fox, An introduction to the Calculus of Variations, Oxford University Press, London, 1950 (Tristano Manacorda)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.4, p. 329–343.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_4_329_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

RECENSIONI

Francesco Severi - Giuseppe Scorza Dragoni: *Lezioni d' Analisi*, volume III, editore Zuffi, Bologna.

Il terzo volume delle Lezioni d'Analisi di Francesco Severi, redatto come già il secondo con la collaborazione di Giuseppe Scorza, è diviso in cinque capitoli: i primi tre dedicati alle equazioni differenziali ordinarie, il quarto alle serie trigonometriche, il quinto ai fondamenti della geometria differenziale delle superficie.

Come nei precedenti volumi sono dapprima esposti i concetti fondamentali e gli sviluppi più elementari degli argomenti trattati, con una ampiezza che supera quanto si riesce ordinariamente a svolgere nei corsi propedeutici universitari. A questa trattazione elementare seguono i « complementi », stampati in corpo minore, che contengono sviluppi più elevati, estensioni delle teorie già esposte e cenni — spesso assai nutriti — di argomenti limitrofi, che stabiliscono numerosi ponti fra le varie teorie.

. Questi complementi sono il riflesso della figura scientifica di Francesco Severi, il cui pensiero matematico non conosce compartimenti stagni, ma è dominato da una visione generale che gli permette di dare ad ogni teoria il suo giusto posto rilevandone i legami con gli altri indirizzi di ricerca. A ciò risponde anche il bisogno di non limitarsi — come ordinariamente avviene — alle funzioni reali di variabili reali, ma di passare sempre — ove sia possibile — alle funzioni analitiche nel campo complesso; in tal modo molti problemi tornano ad essere considerati nel terreno naturale dove sono storicamente sorti e di dove la moda del reale tenderebbe talvolta cacciarli.

Nei primi due capitoli sono esposti i concetti fondamentali sulle equazioni ed i sistemi di equazioni differenziali ordinarie; vengono stabiliti i teoremi di unicità e di esistenza per il problema di Cauchy ed è studiata la dipendenza degli integrali dai valori iniziali.

Notevole interesse e novità per gli studiosi presenta il terzo capitolo dedicato ai problemi al contorno. Le questioni esistenziali sono trattate sistematicamente coi metodi della topologia funzionale di Birkhoff-Kellog-Caccioppoli, che trovano qui una esposizione elegante e particolarmente elementare. Taluno potrebbe forse desiderare che — nella dimostrazione dei lemmi di Birkhoff e Kellog — fosse evitato il ricorso ai teoremi di Bertini, che, pur elementari e familiari ai cultori della Geometria Algebrica, possono non esserlo altrettanto per gli studenti cui è destinato il volume. Io penso che Severi non abbia voluto lasciarsi sfuggire l'occasione di mostrare ancora una volta ai cultori dell'Analisi Matematica in senso stretto il valido aiuto che può dar loro la Geometria Algebrica Italiana; e bene ha fatto se ciò servirà a dare un colpo di piccone alla paratia che divide — per troppi studiosi — la Geometria Algebrica dall'Analisi Matematica dei tempi moderni.

Sempre nel terzo capitolo sono trattati anche i problemi di Sturm-Liouville per le equazioni del 2° ordine, seguendo la via ormai classica fondata sulla identità di Picone.

Una miniera di argomenti si hanno nei complementi ai primi tre capitoli. Sono accennate questioni di carattere assai elevato come i teoremi di Caratheodory sulle equazioni differenziali nel campo delle funzioni quasi continue. Un ampio sviluppo è dato al caso analitico dal quale è preso lo spunto per una esposizione della teoria delle funzioni analitiche di più variabili (estensione di Martinelli della formula integrale di Cauchy, precisazione del concetto di falda analitica, ecc.).

Un posto particolare è dato alla teoria delle equazioni differenziali lineari nel campo analitico e delle loro singolarità (teoria di Fuchs). Sono pure accennati i risultati classici di Painlevè sulle equazioni a punti critici fissi, e quelli di Poincarè e Picard sulle singolarità nel caso analitico reale.

Quanto ai problemi al contorno si ha un rapidissimo cenno del fecondo metodo usato da Cinquini per le questioni esistenziali, ed è esposta la traduzione, mediante la funzione di Green, dei problemi lineari in equazione integrale.

Molte altre teorie e problemi sono tratteggiati nei complementi ai primi tre capitoli, fornendo ampio materiale di orientamento per gli studiosi.

Il quarto capitolo espone nelle sue linee fondamentali la teoria delle serie di Fourier per le funzioni di una variabile. La trattazione pur toccando i punti più salienti della teoria, è particolarmente rapida e ben si presta a coloro che vogliono in breve impadronirsi di tale strumento. Sono studiate le proprietà delle successioni di Fourier, i criteri di convergenza e i procedimenti generalizzati di sommazione; è mostrata anche l'applicazione delle serie di Fourier al classico problema di propagazione delle corde vibranti.

Nei complementi si trovano il teorema di Cantor sull'unicità dello sviluppo in serie trigonometrica ed altri risultati relativi alle serie di Fourier; è pure fatto cenno dell'integrale di Fourier e della teoria degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali.

Nel quinto capitolo sono stabilite le due forme quadratiche fondamentali gaussiane di una superficie e i concetti essenziali della geometria differenziale classica e taluni cenni storici sugl'indirizzi proiettivo-differenziali.

Questo volume, il cui interesse risiede principalmente nella parte dedicata alle equazioni differenziali ordinarie, sarà una utile guida per coloro che, come i nostri insegnanti medi, risiedono lontano da centri di studio: essi vi troveranno abbondante materiale per orientarsi, per allargare la loro cultura e affinare il loro gusto.

Il volume è corredato di preziosi indici analitici, che ne facilitano la consultazione. Mi auguro che in una prossima nuova edizione le frequenti citazioni di risultati spesso recentissimi, contenute nei complementi, non si limitino al solo nome dell'autore e all'anno di stampa; in tal modo l'opera potrà essere un più efficace strumento per coloro che, senza la guida di un maestro, potranno in essa trovare indicazioni e spunti per nuove ricerche. Saranno questi frutti la migliore ricompensa per Francesco Severi; a Lui i matematici italiani devono essere grati per questa opera che arricchisce la nostra letteratura, per il mirabile esempio di instancabile attività e passione scientifica che Egli continua a dare, mostrando che se il Suo giubileo scientifico è stato celebrato egli non è ancora scientificamente giubilato.

Una viva lode infine all'editore dott. Cesare Zuffi per la chiarezza tipografica data al volume.

B. SEGRE, *Arithmetical Questions on Algebraic Varieties*, « University of London, The Athlone Press », 1951, p. 55.

Questo volumetto riproduce tre conferenze, tenute dall'A. nel marzo 1950 al King's College di Londra. Esso tende a promuovere quel più intimo contatto tra aritmetica e geometria algebrica, cui B. SEGRE ha dedicato gran numero di lavori, in ispecie negli anni tra il 1943 ed il 1948, quando egli, soggiornando in Inghilterra, ebbe l'opportunità di entrare in stretti rapporti scientifici, resi più proficui dal continuo contatto personale, con taluni dei valenti cultori inglesi di questioni aritmetiche e soprattutto con L. J. MORDELL. Alla fine dello scritto in esame, il lettore, desideroso di orientarsi in questo campo, può trovare un'ampia bibliografia degli scritti sull'argomento, il quale è di grande vastità e tuttora suscettibile di ampî, interessanti e profondi sviluppi.

Il punto di partenza di quest'ordine di questioni è molto semplice e viene nettamente delineato dall'A. nella prefazione. Mentre lo studio delle varietà algebriche nel campo complesso ha dato luogo ad un'imponente mole di ricerche e ad una intima fusione tra metodi algebrici e geometrici, una situazione interamente nuova si presenta per le varietà algebriche, definite in un corpo qualunque: qui invero, ci si imbatte subito in questioni di carattere aritmetico, che non possono essere trattate con metodi geometrici. Tuttavia — ed è questa l'osservazione, che B. SEGRE ha il merito di aver messo pienamente in luce — una visione sintetica, quale è possibile a chi abbia avuto un'educazione geometrica, permette spesso di meglio inquadrare e di promuovere la soluzione di questioni aritmetiche, mentre, d'altra parte, non si può tacere il fatto che dal seno stesso della geometria algebrica classica, cioè nel campo complesso, sorgano talvolta questioni di schietto carattere aritmetico.

Le tre conferenze di B. SEGRE costituiscono tre brillanti esempî di ciò. La trattazione ha carattere riassuntivo (per i particolari dimostrativi si rimanda alla bibliografia), ma riesce tuttavia molto suggestiva, in quanto l'A. pone in modo preciso le varie questioni, offrendo poi le relative risposte (per lo più dovute all'A. stesso) e segnalando i problemi ancora aperti. Nella prima conferenza si espone una geometrizzazione della teoria aritmetica delle forme quadratiche, ciò che conduce sostanzialmente allo studio delle quadriche definite in un corpo qualunque. Vengono rilevati in particolare i fenomeni anomali, che si presentano nel caso della caratteristica 2. Per il caso di caratteristica qualunque, i problemi aritmetici trattati sono ricondotti allo studio degli spazi lineari esistenti sopra una quadrica. La seconda conferenza tratta dei rapporti tra geometria algebrica ed analisi diofantea. Sono toccati varî argomenti, che mostrano il partito che si può trarre dalla geometria per questioni aritmetiche: risoluzione di un particolare sistema di quattro equazioni diofantee in sei variabili, rette sopra le superficie cubiche, punti razionali sopra varietà cubiche; geometria diofantea di talune superficie del quart'ordine; infine risultati e problemi sopra le varietà che l'A. chiama di SEVERI-BRAUER, cioè le varietà di ordine invariantivo uno in un corpo qualunque. I problemi più elevati vengono toccati nell'ultima conferenza. Qui, premesso che l'A. parla di varietà unirazionali nel senso solito, mentre chiama *birazionali* le varietà che si dicono di consueto razionali (per lasciar libero il vocabolo *razionale* per il caso che si operi nel corpo razionale o con elementi razionalmente noti rispetto ad elementi dati), vengono trattate varie questioni di unirazionalità o di birazionalità. Viene rilevato come sia necessario operare nel campo complesso per la validità del teorema di CASTELNUOVO sulla birazionalità delle involuzioni piane, tale teorema non valendo più nel corpo razionale o reale. Si mettono inoltre nella giusta luce le ricerche di ENRIQUES sulle irrazionalità che si presentano nella rappresentazione piana di una superficie birazionale. Seguono questioni di unirazionalità per ipersuperficie o varietà intersezioni complete, con un breve cenno all'estensione del teorema di BRING e JERRARD ed al problema delle risolventi di HILBERT. Da ultimo si accenna ai problemi aritmetici, che sorgono dalla geometria algebrica classica attraverso la teoria della base.

FABIO CONFORTO

G. Y. RAINICH: *Mathematics of Relativity*, (J. Viley and Sons, Inc. New York, 1950).

Il presente volume può considerarsi un'introduzione alla teoria matematica della relatività. Esso non presuppone che la conoscenza da una parte di alcune leggi elementari di fisica e d'altra parte dell'ordinaria geometria analitica e del calcolo; su queste nozioni, ripercorrendo e riordinando le idee fisiche e matematiche che sono venute a convergere nella creazione della teoria della relatività, espone queste nella sua forma classica (cioè fino all'introduzione della forma quadratica, alle equazioni del campo e alle prove cruciali sulla validità della teoria).

Entro questi limiti, cioè come introduzione e non come esposizione dell'attuale stato della teoria della relatività, il volume è, a mio parere, eccellente.

Per vedere come siano dosati i fatti fisici e gli accorgimenti matematici in questa esposizione basta seguirne l'indice, Nel primo capitolo (Old Physics) vengono ricordate e rielaborate le equazioni del moto con la legge dell'inverso del quadrato della distanza, le equazioni di Eulero per il moto dei fluidi e quelle di Maxwell nell'ambito dell'ordinario calcolo vettoriale (euclideo e tridimensionale): ragioni formali suggeriscono l'introduzione di un « tensore completo » $T_{ij}(i, j = 1, ..., 4)$ le cui componenti dipendono da (e in un certo senso conglobano) quantità fisiche (densità, velocità, pressione, campo elettrico e campo magnetico) legate dalle predette equazioni. Fa così capolino la quarta coordinata (tempo) il cui comportamento tuttavia è differente da quello delle altre (di spazio) e che dà luogo a spiacevolezze dal punto di vista formale. Questa quarta coordinata, e per di più immaginaria, necessita un allargamento dell'ordinaria geometria: ad esso provvede il capitolo secondo (New Geometry) in cui si presenta anche per la prima volta la questione fondamentale dell'invarianza delle equazioni della fisica rispetto ai cambiamenti di coordinate nel cronotopo.

La questione dell'invarianza conduce naturalmente alla relatività speciale (capitolo terzo), cioè alla trasformazione di Lorentz, alla legge d'addizione delle velocità, all'introduzione del tempo proprio e della massa di riposo, del cono isotropo e dei fotoni. Il capitolo si chiude con la determinazione delle grandezze fisiche relative a materia ed energia a partire dal tensore completo.

La non-invarianza delle equazioni del movimento gravitazionale rispetto alle trasformazioni di Lorentz pone in evidenza la necessità di uno schema più largo atto a comprendere i fenomeni gravitazionali: il capitolo quarto (Curved Space) fornisce per via di analogie la voluta estensione (spazî riemanniani, tensore di Riemann, derivazione covariante) e ciò che è essenziale del calcolo differenziale assoluto (nel senso classico di Ricci); il tensore di EINSTEIN (modificazione del tensore di Ricci, ottenuto per contrazione da quello di Riemann) sostituisce il tensore completo in questa nuova formulazione e permette di scrivere le equazioni della fisica in forma invariante e del tutto soddisfacente.

È « vera » la teoria così costruita? A questa domanda risponde il capitolo quinto (General Relativity) ricavando dalla teoria quelle conseguenze che possono essere controllate dall'osservazione e che non si presenterebbero nella fisica classica: cioè le prove cruciali, immaginate da Einstein stesso, relative allo spostamento del perielio di Mercurio, alla deflessione dei raggi luminosi, allo spostamento delle righe spettrali.

Come si vede è tutta materia ormai classica: ma l'interesse della presentazione sta nella sua spontaneità, nel tono discorsivo e persuasivo che induce alle varie estensioni, nell'economia e autosufficienza del volume.

Si può lamentare la mancanza di una prospettiva storica e di riferimenti bibliografici (pur ammettendo che questi occuperebbero per sè soli un volume). Due citazioni, fra le pochissime, possono riuscire gradite al Lettore italiano: una la rivendicazione, a V. Volterra (1889) dell'idea degli integrali armonici; l'altra il ricordo di R. Marcolongo (insieme a Poincarè) fra i precursori dell'uso dello spazio-tempo; per contro manca del tutto il nome di T. Levi-Civita il cui contributo alla relatività classica (sia con l'idea del parallelismo, sia in problemi specifici) è stato decisivo.

ENRICO BOMPIANI

C. J. TRANTER: *Integral transforms in mathematical physics*, IX+118 (Methuen & Co., London, 1951, 6 s.).

Nella Collezione « Methuen 's Monographs on physical subjects » è apparso recentemente questo volumetto di C. J. TRANTER nel quale sono richiamate le trasformazioni (di LAPLACE) $\int_0^\infty f(x)\, e^{-px} dx$, (del seno e del coseno) $\int_0^\infty f(x) \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} px \\ \cos px \end{Bmatrix} dx$, (di FOURIER) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, e^{ipx} dx$, (di HANKEL) $\int_0^\infty f(x) J_n(px) dx$ dove J_n è il simbolo della funzione di BESSEL di prima specie in ordine n, (di MELLIN) $\int_0^\infty f(x) x^{p-1} dx$, e le loro applicazioni alla risoluzione delle equazioni lineari alle derivate parziali della fisica matematica.

Eliminando mediante tali trasformazioni e con l'ausilio delle condizioni iniziali e ai limiti, successivamente alcune variabili, il problema si riduce alle equazioni differenziali ordinarie e dalle soluzioni di queste si risale alle soluzioni cercate con l'impiego delle formule di inversione delle trasformazioni prima indicate.

I primi quattro capitoletti sono dedicati alle precedenti trasformazioni, il quinto alla valutazione numerica delle soluzioni.

Nel Cap. sesto viene considerata la trasformazione finita di FOURIER notevolmente importante tanto nei problemi esistenziali che in quelli numerici, e nel settimo è descritto il metodo di R. V. SOUTHWELL per il calcolo delle soluzioni col simultaneo impiego del procedimento delle trasformazioni e del calcolo delle differenze finite.

L'A. si è proposto di suscitare nel lettore la fiducia nei metodi operazionali e vi è riuscito: alle memorie originali e ai trattati è demandata la giustificazione rigorosa dei procedimenti descritti.

Il volume è accompagnato da un indice bibliografico delle memorie originali particolarmente in lingua inglese e da un indice generale della materia.

GIOVANNI SANSONE

H. LEBESGUE: *Leçons sur les constructions géométriques* (Paris, Gauthier-Villars, 1950), pp. VI + 301, con 81 figure.

Quest'opera postuma del compianto Analista contiene le lezioni da lui impartite al Collège de France nel 1941, fino al momento della sua scomparsa. Accanto ad eccellenti doti didattiche, essa manifesta un acuto senso storico ed una profonda visione geometrica dei problemi, ispirata ad una valutazione della Geometria quale arte plastica: ed è interessante rilevare come, a detta dello stesso Lebesgue, alla formazione del suo gusto geometrico avesse contribuito in modo decisivo un corso di geometria descrittiva ch'egli aveva seguito a Parigi nel 1897, quale allievo dell'École Normale Supérieure.

Il volume è diviso in tre parti, dedicate rispettivamente ai procedimenti costruttivi (in relazione specialmente ai problemi celebri lasciatici dagli antichi), alle questioni algebriche sollevate dalle costruzioni geometriche, ed ai punti a coordinate razionali situati sulle curve algebriche. Si tratta, come si vede, di argomenti ormai classici, i quali però vengon qui rielaborati in modo originale, e con una chiarezza, una passione ed una freschezza tali da rendere la lettura sempre avvincente ed istruttiva. L'esposizione avrebbe potuto venir abbreviata, ed in qualche punto semplificata, facendo uso di nozioni e risultati tratti dalla geometria proiettiva, dalla geometria algebrica, dall'algebra, dall'aritmetica, o dalla topologia; l'A. ha però preferito forgiarsi da sè gli strumenti che a volta a volta gli occorrono, presupponendo noto pochissimo al lettore, e riuscendo così ad imprimere alla trattazione pregevoli caratteristiche di varietà ed autonomia. Frequenti ed assai interessanti le note personali, di natura storica o filosofica; assai scarse invece le indicazioni bibliografiche, alle quali tuttavia è facile provvedere ricorrendo ai diversi articoli delle enciclopedie matematiche tedesca, francese ed italiana, ed ai *Collectanea* di Enriques.

Ecco ora in breve la trama dell'opera. Nella prima parte, dopo alcune premesse storiche sul problema della costruzione e sui diversi modi di ottenere una curva per punti, con particolare riguardo ai problemi della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo, viene studiata la portata costruttiva degli usuali strumenti da disegno (riga semplice ed a due bordi, squadra, compasso, ecc.), dando fra l'altro i teoremi di Mohr e di Mascheroni sulla geometria del compasso, e le principali proposizioni relative al piegamento della carta. Viene quindi sviluppata la teoria geometrica dei sistemi articolati, culminante col teorema di Kempe-Koenigs secondo cui ogni relazione algebrica fra un numero finito di punti del piano o dello spazio può venire realizzata mediante un opportuno sistema articolato. Sono da rilevare i problemi di geometria anallagmatica e sferica proposti nelle pp. 59, 60, 62, e l'eleganza di varie costruzioni ottenute mercè l'agile alternarsi di considerazioni sintetiche e di calcoli algebrici.

Nella seconda parte, il problema della costruzione viene collegato con l'introduzione dei numeri irrazionali, algebrici e trascendenti, e con lo studio dei campi di razionalità e delle teorie algebriche di Galois. Dopo aver ottenuti i risultati di Lambert e Legendre sull'irrazionalità di π, π^2, e, e^n, (con n intero positivo), servendosi di proprietà premesse relative alle frazioni continue, viene provata l'impossibilità di duplicare il cubo o di trisecare l'angolo mediante riga e compasso. È quindi compiutamente trattato il problema della costruzione dei poligoni regolari, poggiando su opportune considerazioni algebriche ed aritmetiche, ed ottenendo in particolare la costruzione esplicita con riga e compasso del poligono di 17 lati, e quella del poligono di 7 lati con riga, compasso e trisettore. Seguono una trattazione generale del problema delle costruzioni geometriche mediante riga e compasso, con cenni sull'analogo problema ottenibile col sostituire il trasportatore di segmenti al compasso, ed uno studio dell'utile che si può trarre dalla conoscenza delle rette trisettrici od n-settrici di uno o più angoli, in relazione anche ad un teorema di Morley. Vi è infine un'esposizione, in qualche punto sommaria, delle dimostrazioni di Hermite e di Lindemann sul la trascendenza dei numeri e e π.

Nella terza parte, lo studio del problema di determinare i punti razionali situati su curve algebriche porta, da un lato, a questioni algebriche e topologiche sul genere delle curve e, d'altro canto, alla risoluzione di quel problema aritmetico nel caso delle coniche e di certe cubiche ellittiche. Il caso elementare della retta conduce da ultimo a considerazioni attinenti ai fondamenti della geometria proiettiva.

BENIAMINO SEGRE

H. DÖLP - E. NETTO: *Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung*, 21. Aufl. (Berlin, Töpelmann, 1949), pp. 214, RM. 2,80.

Questo volumetto contiene 456 esercizi di calcolo differenziale (derivazioni, massimi e minimi, sviluppi in serie, ecc.), 434 esercizi concernenti integrazioni indefinite e definite, e 78 esercizi sulle prime proprietà differenziali ed integrali di curve e superficie. Di ogni esercizio è data senza dimostrazione la relativa soluzione, ed i vari tipi di esercizi sono preceduti da sommarie considerazioni teoriche illustrative e da esempi. La raccolta può riuscire particolarmente utile al principiante, ed a chi debba tenere un corso di esercitazioni di calcolo.

BENIAMINO SEGRE

H. HORNICH: *Lehrbuch der Funktionentheorie* (Wien, Springer, 1950), pp. VII + 216 con 34 figure, dollari 4,70, rilegato dollari 5,20.

Questo volume, nel breve volgere di poco più di 200 pagine, fornisce un'ottima esposizione dei fondamenti della teoria delle funzioni analitiche di una variabile, e di varie applicazioni. Ciò è reso possibile da un felice ordinamento della materia e da uno stile stringato ed incisivo, che fa risaltare l'eleganza degli argomenti trattati, senza nuocere alla chiarezza ed al rigore. Esempi illustrativi ed interessanti risultati complementari trovansi accennati alla fine di ciascuno dei dieci capitoli in cui l'opera è divisa.

Definiti nel cap. I i numeri complessi, e stabilite le prime proprietà nel campo complesso delle successioni e serie e delle funzioni esponenziali, circolari e logaritmo, nei cap. II e III vengono introdotte le funzioni analitiche rispettivamente al modo di Cauchy-Riemann ed al modo di Weierstrass, giungendo fra l'altro ai teoremi di Abel e di Tauber sulle serie di potenze. Seguono nei capitoli IV e V lo studio dell'integrazione nel capo complesso, col teorema di Goursat, e la formula di Cauchy assieme a varie conseguenze (teorema di Moréra, inversione di una serie di potenze, integrale di Poisson, ecc.). Il cap. VI tratta delle singolarità isolate (serie di Laurent, residui, ecc.) ed è completato (cap. VII) dai teoremi di Weierstrass e Vitali sulle serie di funzioni analitiche, dalle classiche rappresentazioni di funzioni intere e meromorfe come prodotti infiniti o serie di funzioni razionali, ed inoltre (cap. VIII) dalle prime proprietà concernenti il prolungamento analitico e le superficie di Riemann.

Gli ultimi due capitoli sono i più ampi ed elevati. Il cap. IX si inizia con certe proprietà di univalenza, col principio di simmetria di Schwarz e con lo studio di particolari rappresentazioni conformi. Passa quindi alle funzioni periodiche, agli integrali euleriani, ed alla dimostrazione elementare (di Bloch e Landau) del teorema di Picard, per terminare col teorema di Riemann sulla rappresentazione conforme, integrato da cenni sul teorema di Poincaré e Koebe relativo all'uniformizzazione.

Nel cap. X, premessa una dimostrazione mediante approssimazioni successive del teorema sulle funzioni implicite, vengono ottenute le prime proprietà delle funzioni algebriche di una variabile e dei loro integrali. Lo studio di queste è quindi approfondito nel caso ellittico, mercè l'introduzione delle funzioni $\wp$, ζ e σ di Weierstrass, con le loro periodicità ed i relativi teoremi di addizione.

Il volume termina con un indice analitico, ma contiene scarsissime notizie storiche e nessuna indicazione bibliografica. La sua presentazione tipografica è eccellente sotto tutti gli aspetti

BENIAMINO SEGRE

KÖNIG R. und WEISE K. H.: *Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie. Erster Band: Das Erdsphäroid und seine konforme Abbildungen.* Mit. 109 zum Teil farbigen Abbildungen, XVIII+522 Seiten, Gr. 8°. Springer-Verlag, Berlin, 1951. Ganzleinen D. M. 40,60.

Quest'opera si riferisce al campo della Geodesia classica (o geometrica). la quale, come è ben noto, studia la forma generale della Terra valendosi del classico metodo delle triangolazioni. Non vengono perciò affrontati i problemi matematici che interessano la Geodesia gravimetrica (o fisica) o la Teoria delle figure di equilibrio dei fluidi ruotanti.

L'intera opera è divisa in quattro parti, contenute in due volumi. Il primo di questi — che oggi vede la luce — contiene soltanto la prima parte, dedicata alla rappresentazione conforme degli sferoidi sul piano e sulla sfera. Il secondo volume — non ancora stampato — conterrà invece le altre tre parti dell'opera, dedicate rispettivamente alla teoria delle linee geodetiche su una superficie qualsiasi, alla rappresentazione conforme di due generiche superfici l'una sull'altra, e allo studio dei triangoli geodetici e generali sulle superfici.

« Noi speriamo — scrivono gli AA. — di ricondurre di nuovo insieme, attraverso la nostra opera, Matematica e Geodesia, così come erano strettamente associate nella mente del fondatore della Geodesia superiore C. F. Gauss; mostrando al matematico nuove strade verso un importante campo di applicazioni e fornendo, nello stesso tempo, al geodeta non soltanto un libro di testo, che gli procuri, assieme ad un nuovo e chiaro punto di vista matematico, nuovi e più potenti metodi di indagine, ma anche un vero e proprio manuale che possa essere veramente utile per la grande varietà delle rappresentazioni e degli sviluppi, specialmente adatti al calcolo con le macchine calcolatrici ».

Possiamo affermare che questo scopo è stato, nella massima parte, raggiunto in questo volume. In un campo ormai classico — quale è quello delle rappresentazioni conformi di sferoidi (ellissoidi prossimi alla sfera) sopra un piano o sulla sfera — era certamente difficile dire una parola che fosse del tutto nuova. La vera novità dell'opera consiste piuttosto, a mio parere, nell'aver nutrito fiducia, in un libro che è pur destinato alle applicazioni, nell'affrontare i problemi matematici dal punto di vista più generale possibile — che è poi l'unico veramente soddisfacente — e nell'aver fatto vedere che questa via non solo non è antieconomica, ma, anzi, conduce rapidamente ai risultati più convenienti per le applicazioni anche numeriche. Mi permetto di illustrare questo punto di vista con un esempio dei più elementari. Si consideri l'espressione che fornisce, in funzione della latitudine geografica φ, la curvatura. $\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{3/2}}$ del meridiano di un ellissoide di rivoluzione schiacciato ($a =$ semi-asse equatoriale, $e =$ eccentricità dell'ellisse meridiana). Di questa funzione i geodeti utilizzano continuamente due tipi di sviluppi in serie: il primo in serie di potenze di $\varphi - \varphi_0$ (nell'intorno di un punto di latitudine φ_0), l'altro in serie di Fourier. Ora questi sviluppi si ottengono assai facilmente, e con un metodo uniforme generale, assumendo la funzione da sviluppare nel campo complesso (attraverso la variabile ausiliaria: $Z = e^{i\varphi}$ ben nota ai matematici); si hanno così subito sia l'espressione analitica dei coefficienti degli sviluppi, sia il campo di convergenza dei medesimi. Passando poi all'integrale ellittico che fornisce l'arco di meridiano, anche in questo caso lo studio dei relativi sviluppi in serie è reso facile e rigoroso dall'uso sistematico delle superfici di Riemann.

La maggior parte del volume è però dedicata alla rappresentazione conforme degli sferoidi sul piano e sulla sfera. Anche qui, naturalmente, gli A.A. si muovono nel campo complesso. L'uso sistematico della variabile: $M = H + iL$ ($H =$ latitudine isometrica; $L =$ longitudine), — chiamata *longitudine complessa* —, rende agile la trattazione. Come è ben noto ' funzione: $Z = M$ fornisce la proiezione di Mercator. Tabelle (calcolate sulla base dell'ellissoide di Bessel), riassunti di formule ed esempi numerici danno all'opera il suo carattere di manuale.

La veste tipografica perfetta è degna della tradizione della Casa editrice. Per le numerose figure (che sono destinate, in massima parte, a sintetizzare la corrispondenza tra i piani complessi di due variabili) gli editori non hanno esitato ad adoperare due colori, ciò che facilita enormemente la rapida comprensione del testo. In conclusione, si tratta di un'opera che i matematici leggeranno con interesse, trovandovi numerosissime applicazioni di concetti e di metodi della Teoria delle funzioni (rappresentazioni conformi, integrali ellittici, superfici di Riemann, ecc.), mentre i geodeti avranno un testo di sicuro affidamento nello sviluppo delle loro ricerche.

MASSIMO CIMINO

O. F. G. SCHILLING: *The theory of valutations,* « Mathematical Surveys of the American Mathematical Society », n. 4, New York, 1950, p. VII+253, dollari 6.00.

Nel IV volume delle pregevoli « Surveys », pubblicato dall'American Mathematical Society, O.F.G. Schilling affronta l'esposizione di uno dei più importanti e profondi campi dell'Algebra moderna, la teoria delle valutazioni. Tale teoria, che prende le mosse dagli studi di Dedekind e Weber sulle funzioni algebriche e da quella di Hensel sui numeri p-adici, fu costruita principalmente ad opera di Chevalley, Krull e Ostrowski, e sviluppata, oltre che da questi autori, da Artin, Hasse, e dallo stesso Schilling. Essa può essere considerata come « un ramo dell'algebra topologica »: infatti l'introduzione di una valutazione in un campo permette di stabilire in esso una metrica.

Per poter definire il concetto di valutazione, occorre anzitutto introdurre quello di gruppo additivo semplicemente ordinato. Un insieme Γ si dice gruppo additivo semplicemente ordinato se in esso sono definite un'operazione di addizione (indicata col segno $+$) rispetto alla quale gli elementi di Γ formano gruppo, e una relazione di diseguaglianza $\geq$, tale che, se α, β, γ, δ sono elementi di Γ: 1) è $\alpha \geq \beta$, o $\beta \geq \alpha$; 2) se è $\alpha \geq \beta$, e $\beta \geq \alpha$, è $\alpha = \beta$; 3) se è $\alpha \geq \beta$ e $\beta \geq \gamma$, è $\alpha \geq \gamma$; 4) se è $\alpha \geq \beta$, qualunque siano γ e δ, è $\gamma + \alpha + \delta \geq \gamma + \beta + \delta$.

Sia ora dato un corpo D (anche non commutativo). Una valutazione di D è una corrispondenza univoca tra tutti gli elementi di D diversi da zero e tutti gli elementi di un gruppo additivo semplicemente ordinato Γ, tale che, se si indica con Va l'elemento di Γ corrispondente all'elemento a di D, si ha $V(ab) = Va + Vb$, e $V(a+b) \geq \mathrm{Min}[Va, Vb]$. All'elemento 0 di D si fa poi orrispondere il valore $V0 = \infty$.

P. es., se $C(x)$ è il campo di tutte le funzioni razionali nell'indeterminata x a coefficienti nel campo complesso C, si ha che ogni espressione $a(x)$ non identicamente nulla di $C(x)$ si può scrivere, in uno ed un sol modo, sotto la forma $a(x) = x^{\alpha} \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$, ove α è un conveniente intero (positivo, nullo o negativo) e $a_1(x)$, $a_2(x)$ sono convenienti polinomi in x, nessuno dei quali si annulla per $x = 0$. Se si fa corrispondere a ciascuna espressione $a(x)$ di $C(x)$ (cioè a ciascuna funzione razionale fratta nella x con coefficienti complessi), l'intero α così ottenuto, si ottiene una valutazione di $C(x)$ nel gruppo additivo dei numeri interi: si constata infatti subito che le condizioni occorrenti perchè si abbia una valutazione sono verificate.

L'introduzione di una valutazione in un corpo K permette di costruire un corpo ampliato, che sta al corpo di partenza nella relazione in cui il campo reale sta al campo razionale: precisamente, la valutazione, introducendo nel corpo K una metrica, consente di distinguere tra le successioni di elementi del corpo le cosiddette successioni fondamentali, soddisfacenti a una analoga della condizione di convergenza di Cauchy; il corpo ampliato K gode della proprietà che in esso ogni successione fondamentale ammette un limite finito (come avviene nel campo reale). Esponiamo la cosa più in dettaglio nel caso in cui il gruppo ordinato additivo Γ, usato per introdurre in K la valutazione, è archimedeo, quindi (come si dimostra) isomorfo ad un sottogruppo del gruppo additivo dei numeri reali. Un tale gruppo dicesi di rango 1. Potremo considerare addirittura Γ come un sottogruppo del gruppo additivo dei numeri reali, e quindi la valutazione farà corrispondere ad ogni elemento a di K un numero reale α. Preso ad arbitrio un numero reale r, compreso tra 0 ed 1, si ponga $f_r(a) = r^{\alpha}$, α essendo l'elemento di Γ corrispondente all'elemento a di K. La funzione $f_r(a)$ associa ad ogni elemento di K un numero reale. Orbene, una successione $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ in K si dirà *fondamentale* se, scelto comunque un numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un intero positivo $N = N(\varepsilon)$, tale che, per ogni coppia di interi n ed m maggiori di N si ha $f_r(a_n - a_m) < \varepsilon$; e si dirà successione nulla, se oltre a ciò, comunque si scelga un numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un intero positivo $N = N(\varepsilon)$, tale che, per ogni intero $n > N$, è $f_r(a_n) < \varepsilon$. Si dimostra che tali definizioni non dipendono dalla scelta di r. Le successioni fondamentali possono suddividersi in classi, in modo che due successioni appartengono alla stessa classe se e solo se la successione ottenuta facendo la differenza tra i termini di uguale indice delle due successioni date è una successione nulla. Si dimostra allora che, definita somma di due successioni la successione ottenuta sommando i termini di eguale indice di esse, e definito in modo analogo il prodotto di due successioni, si viene ad indurre nell'insieme delle classi suddette, un'operazione di somma ed una di prodotto, e che tale insieme è un corpo $\overline{K}$ rispetto alle suddette operazioni di somma e prodotto.Inoltre, chiamata successione costante una successione i cui termini, almeno da un certo punto in poi, sono tutti uguali tra loro, si ha che le classi ciascuna delle quali contiene una successione costante, formano un sottocorpo di $\overline{K}$, isomorfo al corpo K di partenza. Pertanto, se si identifica addirittura tale sottocorpo con K, si ha che $\overline{K}$ può considerarsi un ampliamento di K. Si dimostra poi che la funzione $f_r(a)$ definita in K può prolungarsi in $\overline{K}$, e che in $\overline{K}$ ogni successione fondamentale differisce da una successione costante per una successione nulla (e pertanto l'elemento che costituisce la successione costante può considerarsi come il limite della successione fondamentale data). Ciò si esprime dicendo che $\overline{K}$ è completo.

Mi sono indugiato nella spiegazione dettagliata di questi procedimenti, per dare anche al lettore non esperto in questioni di algebra moderna un'idea del concetto di valutazione e della sua funzione nella teoria dei corpi. Non ci resta che indicare per sommi capi gli argomenti trattati nei 7 capitoli dell'opera.

Il primo capitolo pone il concetto di valutazione, e ne espone le prime proprietà, con riferimento anche alle relazioni tra valutazione ed omomorfismi tra corpi, e al prolungamento di una valutazione di un campo K agli ampliamenti algebrici di K.

Il capitolo 2 tratta della costruzione dei campi completi, sia nel caso di valutazioni di rango 1, sia in quello, più generale, di valutazioni di rango qualunque (che richiede considerazioni transfinite). Fra l'altro vien dato il criterio di Hensel per la riducibilità dei polinomi.

Il capitolo 3 riguarda la teoria della ramificazione delle valutazioni, e tratta delle relazioni tra certi sottocampi di un ampliamento algebrico K di un campo F e i corrispondenti sottogruppi del gruppo di Galois, in rapporto anche al gruppo ordinato additivo che dà origine alla valutazione di K. Si fa uso, oltre che dell'ordinaria teoria di Galois per gli ampliamenti algebrici finiti, anche di quella, dovuta a Krull, e concernente gli ampliamenti algebrici infiniti.

Il capitolo 4 è dedicato alla teoria degli ideali nei campi di numeri algebrici e in quelli delle funzioni algebriche di una variabile. Il capitolo 5 riguarda l'estensione di tale teoria alle algebre semplici.

Il capitolo 6 tratta delle relazioni tra la classe di tutti gli ampliamenti abeliani di certi campi completi e i sottogruppi del gruppo moltiplicativo dei campi stessi. Infine, il capitolo 7 riguarda la struttura algebrica e topologica dei campi completi. Chiudono il volume due appendici, una relativa all'estensione della teoria di Galois agli ampliamenti algebrici infiniti, l'altra consistente in un richiamo delle principali definizioni e dei più importanti teoremi sulle algebre lineari. Esse hanno lo scopo di facilitare al lettore la comprensione di taluni capitoli del testo, senza costringerlo a consultare a tal proposito altre opere. Lo stesso scopo ha un breve glossario in cui sono riportati i significati dei termini più comunemente usati nella teoria dei gruppi, in quella degli anelli, degli spazi lineari, degli ideali e dei campi, e adoperati nel volume.

Molto accurata la bibliografia, che viene riportata separatamente al termine di ogni capitolo. Sarebbe stato opportuno, a mio parere, dato il gran numero di definizioni che simili teorie comportano, un indice analitico alla fine del volume.

L'esposizione è sempre molto precisa, anche se talora un po' troppo stringata. L'autore è riuscito, in tal modo, a condensare nel volume una gran mole di risultati, mettendo il lettore pienamente al corrente dello stato attuale di questa bella teoria. Egli ha saputo anche abbastanza bene mettere in luce per quali vie si sia giunti, partendo da campi di studio più elementari e oramai classici, ad una teoria che presenta un così alto grado di generalità e di astrazione.

GUIDO ZAPPA

É. BOREL: *Leçons sur la théorie des fonctions* (Principes de la théorie des ensembles en vue des applications à la théorie des fonctions) Quatrième édition, 1950.

La prima edizione di questo classico libro fu pubblicata nel 1898, e fu il primo libro della collezione di monografie sulla teoria delle funzioni, collezione pubblicata sotto la direzione dell'illustre matematico É. Borel, autore di questo volume.

La seconda edizione fu pubblicata nel 1914, la terza nel 1928.

In questa edizione l'illustre Autore ha portato lievissime aggiunte, conservando così al libro il carattere di introduzione alla teoria delle funzioni.

Precisamente ha aggiunto qualche breve nota a piè di pagina, note contrassegnate con (IV), ed in fondo al libro una brevissima Nota. Nota, che risulta così la VIII del libro, riguardante l'assioma della scelta e le definizioni asintotiche, questioni che sono oggetto di attuali ricerche dell'Illustre Matematico.

Il libro è diviso in sei capitoli:

Capitolo I - Notions génerales sur les ensembles, pp. 1-21.
Capitolo II - Les nombres algébriques et l'approximation des incommensurables, pp. 22-34.
Capitolo III - Les ensembles parfaits et les ensembles mesurables,. pp. 35-50.
Capitolo IV - Le prolongement analytique, pp. 51-61.
Capitolo V - Sur la convergence de certaines séries réelles, pp. 62-79.
Capitolo VI - La notion de fonction d'une variable complexe, pp. 80-101.

NOTE

Note alla prima edizione (1898):
Nota I - La notion des puissances, pp. 103-111.
Nota II - La croissance des fonctions et les nombres de la deuxième classe, pp. 112-123.
Nota III - La notion de fonction en générale, pp. 124-134.

Note alla seconda edizione (1914):
Nota IV - Les polémiques sur les trasfinis et sur la démonstration de Zermelo. pp. 135-179.
Nota V - Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmètiques, pp. 180-213.
Nota VI - La théorie de la mesure et la théorie de l'intégration, pp 214-253.

Note alla terza edizione (1928):
Nota VII - Pour et contre la logique empirique, pp. 254-286.

Nota alla quarta edizione (1950):
Nota VIII - L'axiome du choix et les définitions asymptotiques, pp. 287-291.

E' opportuno qui riassumere, brevemente, i punti salienti delle questioni trattate nei vari capitoli e nelle note.

Nel primo capitolo, l'A. tratta delle nozioni fondamentali della teoria degli insiemi, che, dopo le classiche memorie di Cantor, Acta Matem., 1883, Band II, tanto interessarono i matematici. In particolare modo l'A. tratta della potenza degli insiemi numerabili e degli insiemi « effectivement énumérables »: su questo concetto aggiunge, a piè della pagina 7, una breve nota (IV), e ne illustra la importanza nella Nota II, di questa edizione.

Nel secondo capitolo, l'A. tratta dei numeri algebrici e della approssimazione degli incommensurabili, delle ricerche di Liouville e della approssimazione dei numeri mediante frazioni continue algebriche.

Nel terzo capitolo, l'A. considera gli insiemi perfetti e gli insiemi misurabili (che secondo la definizione di Lebesgue si chiamano insiemi misurabili B). Aggiunge una brevissima nota, a piè pagina 49, sugli insiemi misurabili B e misurabili secondo Lebesgue.

Nel quarto capitolo tratta del prolungamento analitico, del teorema di Poincarè-Volterra sulle funzioni polidrome. Aggiunge, a pagina 59, una nota richiamando le « Leçons sur les fonctions des variables réelles » dell'A.

Nel capitolo quinto, l'A. considera le serie della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r_n^{m_n}}, \qquad r_n^2 = (x - a_n)^2 + (y - b_n)^2 + \dots,$$

ove A_n e m_n sono numeri reali positivi, le variabili x, y, ..., in numero finito, e le curve, ove queste serie sono convergenti uniformemente.

Nel sesto capitolo, l'A. tratta della teoria delle funzioni di variabile complessa e prende per base le memorie di Weierstrass (Abhandlungen aus der Functionenlehre) e tiene conto delle ricerche di Painlevé, specialmente sulle linee singolari delle funzioni analitiche (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1888), Mette in evidenza la idea fondamentale di Weierstrass sulla distinzione fra funzione analitica ed espressione analitica e tratta quindi delle espressioni analitiche rappresentanti fuzioni analitiche (Runge, Acta Matem. Band. VI e Nota di Painlevé (Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en-séries des polynomes, di Borel)). Tratta poi del teorema di Mittag-Leffler (Sur la représentation analytique des fonction monogènes uniformes d'une variable indépendante, Acta Matem., Band. IV, ecc.) che dà una soluzione meno generale di quella di Runge e Painlevé. Tratta infine delle serie di funzioni razionali e della infinità numerabile di curve sulle quali queste serie possono convergere uniformemente ed assolutamente e degli sviluppi dello zero.

Nota I - *La notion des puissance.*

La idea di potenza di un insieme, dovuta a Cantor, viene quì analizzata non indipendentemente da ogni substratum e così l'A. parla della uguaglianza di potenza, potenza inferiore e superiore; potenza di un insieme di funzioni, ecc. Una esposizione differente da questa di Borel si trova nei libri di Lusin: Leçons sur les ensembles analytiques; e di Sierpinski: Leçons sur les nombres transfinis, come l'A. indica in una nota (IV), piè pagina 111.

Nota II - *La croissance des fonction et les nombres de la deuxième classe.*

In questa nota l'A. tratta della crescenza delle funzioni, del classico teorema di Paul du Boy-Reymond, dei numeri trasfiniti di Cantor e pone in fine una breve nota (IV), a piè pagina 123, in cui espone il punto di vista della difficoltà di descrivere effettivamente un metodo preciso di costruzione degli insiemi di numeri della seconda classe.

Nota III - *La notion de fonction en générale.*

L'A. tratta diffusamente delle varie nozioni di funzioni: funzioni continue, discontinue, analitiche, ecc., e getta un colpo d'occhio su queste funzioni e sulla nozione di funzione arbitraria.

Nota IV - *Les polémiques sur les transfinis et sur la démonstration de Zermelo.*

L'A. tratta diffusamente dell'assioma della scelta: riporta lettere di R. Baire, di H. Hadamard, di Lebesgue, e di Borel, e indica la relazione di questo assioma della scelta con la filosofia. Non è possibile riassumere i vari punti di vista e le posizioni diverse, possiamo dire con Borel stesso che già vi è il risultato importante che tutti quelli che ammettono questo assioma prendono ora cura, quando ottengono un teorema nuovo, di specificare se la dimostrazione del teorema esige o no la accettazione dell'assioma di Zermelo. Questo assioma ha creato un ramo notevole della matematica. Vedasi la prefazione a questa edizione.

Nota IV - *Les probabilités dénombrales et leurs applications aritmétiques.*

L'A. tratta delle probabilità e delle loro applicazioni aritmetiche ed in particolar modo delle probabilità numerabili e cioè della probabilità in cui entrano insiemi numerabili, probabilità che stanno fra le probabilità discontinue e quelle continue. Applica alle frazioni decimali, alle frazioni continue, ecc.

Nota VI - *La théorie de la mesure, la théorie de l'intégration.*

L'A. introduce la definizione di numero calcolabile e di funzione calcolabile e di funzione a definizione asintotica, cioè: delle funzioni il cui valore per un valore determinato della variabile non dipende che dalla maniera in cui si comporta all'infinito uno sviluppo convergente di questo valore della variabile. Tratta degli insiemi misurabili; e del calcolo effettivo degli integrali. ecc.

Nota VII - *Pour et contre la logique empirique.*

L'A. riassume in questa nota le discussioni che si sono avute in seguito alla teoria di Brouwer sulla logica empirica. Tratta diffusamente sul principio del terzo escluso, della critica della logica empirica. Per orientamenti vedasi Whitehead-Russell: Principia mathematica.

Nota VIII - *L'axiome du choix et les définitions asymptotiques.*

L'illustre A. mostra una importante relazione fra l'assioma della scelta di Zermelo e dei fatti geometrici che sono alla base di questo: precisamente mostra che la nozione di equivalenza euclidea non è applicabile alle figure geometriche definite con l'assioma della scelta. Questa questióne fu trattata dall'A. nei C. R., T. 224, 1947, pag. 1537 e pag. 1593, in seguito a delle osservazioni fatte da parte dei fautori dell'assioma della scelta. Qui mostra, con un esempio, e senza applicare la teoria della misura di un insieme, i fatti geometrici che sono alla base dell'assioma della scelta. In base a queste considerazioni l'illustre Autore, in una nota posteriore alla pubblicazione di questa quarta edizione, nei C. R., T. 230, 1950, pag. 1989, propone di dare il nome di Analisi Euclidea all'insieme dei teoremi di analisi, e della teoria degli insiemi, e delle funzioni, che si ottengono non ammettendo l'assioma di Zermelo; mentre propone di chiamare Analisi non Euclidea l'insieme dei teoremi che si ottengono ammettendo questo assioma.

Nella seconda parte di questa breve nota l'A. mostra le difficoltà che si presentano quando si debbano definire uno o più elementi di un insieme se si hanno insiemi a definizione asintotica; come, ad esempio, le definizioni basate sul comportamento all'infinito di uno sviluppo in frazione continua o in frazione decimale.

Infine l'A. fa alcune considerazioni sulle definizioni sintetiche e sulle definizioni mediante processi numerici dei numeri reali e indica la importanza e la necessità di collegare queste definizioni di cui le ricerche di Liouville, sui numeri algebrici, sono i primi passi su questa via.

GIUSEPPE BELARDINELLI

Ch. Fox: *An introduction to the Calculus of Variations*. London, Oxford University Press, 1950, pp. 271.

L'A. dichiara nelle prefazione di essersi deciso a scrivere il volume in esame per ovviare alla deficienza, da lui constatata, di un testo per gli studenti d'università che unisca, alla esposizione dei principi del calcolo delle variazioni, quella di esempi atti a chiarire la portata e la utilità del calcolo stesso. Il tentativo è indubbiamente assai interessante ed utile, ma non mi sembra completamente riuscito.

Effettivamente, gran parte del volume è dedicato alla esposizione di esempi, per lo più classici, tratti dalla meccanica e dalla fisica, ma dalla trattazione che l'A. ne dà sembrerebbe che suo intento fosse stato quello di darne notizia più che conoscenza. Così, ad es., l'A. torna più volte sul principio della minima azione (ed è scomodo, qui e altrove, il dover talvolta utilizzare in anticipo dei risultati teorici la cui dimostrazione è data solo successivamente), e dedica un intero capitolo al principio di Hamilton, ma si sofferma troppo a lungo su definizioni e concetti ausiliari e che da noi fanno parte dell'usuale bagaglio di nozioni di ogni studente dopo il secondo anno di università. Così, ad es., per il concetto di vincolo, di sistema olonomo e anolonomo e così via, mentre non appare abbastanza chiaramente, mi sembra, la grande portata concettuale e pratica del principio stesso.

Un capitolo certamente interessante è quello dedicato alla relatività ristretta, perchè si espone in esso il metodo di Levi Civita per passare dalla meccanica classica a quella relativistica. Anche qui, però, gran parte dello spazio è dedicato alla esposizione dell'esperienze di Michelson e Morley, della trasformazione di Lorentz, della critica del concetto classico di spazio e tempo ecc., cose certamente necessarie e utili per una esposizione della teoria della relatività, che esula però dagli scopi dell'opera, ma che hanno costretto l'A. a limitare a pochissime pagine l'esposizione del metodo di Levi Civita, di modo che non se ne può apprezzare in pieno la semplicità e bellezza.

Il volume è stato scritto per gli studenti del terzo anno di università per la laurea in matematica, e questo forse spiega la preoccupazione dell'A. di conseguire la massima semplicità di esposizione. Questa preoccupazione influenza anche, mi sembra, la trattazione della parte puramente teorica. Le dimostrazioni appaiono talvolta prive di quella chiarezza e di quel rigore che sono uno degli scopi e delle ambizioni delle scienze matematiche.

Con tutto ciò, questo volume ha indubbiamente dei pregi che sarebbe ingiusto sottovalutare. Si tratta di un tentativo interessante, che conseguirà certamente il successo e lo scopo per cui è stato creato, se l'A. vorrà, in una successiva eventuale edizione, rendere in alcuni punti più rigorosa, in altri più concisa l'esposizione, pur conservando le linee generali dell'opera che appaiono buone.

Il piano dell'opera è il seguente. Cap. I: La prima variazione. Cap. II. La seconda variazione. Cap. III. Generalizzazione dei risultati dei capitoli precedenti. Cap. IV. Massimi e minimi relativi e problemi isoperimetrici. Cap. V. Principio di Hamilton e principio della minima azione. Cap. VI. Principio di Hamilton nella relatività speciale. Cap. VII. Metodi di approssimazione con applicazioni ai problemi della elasticità. Cap. VIII. Integrali con punti estremi variabili. Integrale di Hilbert. Cap. IX. Variazione in senso forte e funzione E di Weierstrass.

Tristano Manacorda