BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ALFRED MOESSNER

Sopra alcune equazioni diofantee.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.4, p. 318–319.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_4_318_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Sopra alcune equazioni diofantee.

Nota di ALFRED MOESSNER (a Gunzenhausen).

Sunto. - *Si danno soluzioni di alcune equazioni diofantee.*

In questa Nota diamo le soluzioni delle questioni da noi proposte nel «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana» vol. 14 (1935), p. 314 e vol. 15 (1936), p. 96.

a) *Risoluzione in numeri interi dell'equazione*

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 = 0$$

Qualunque siano a e b sussiste l'identità

$$(a^5 + 75b^5)^5 + (a^5 - 75b^5)^5 = (a^5 + 25b^5)^5 + (a^5 - 25b^5)^5 + (10a^3b^2)^5 + (50ab^4)^5.$$

Scegliendo gli interi positivi a e b tali che $25b^5 < a^5 < 75b^5$ otteniamo le cercate soluzioni.

Es. Se $a = 2$, $b = 1$
si ha

$$x_1 = -107,\ x_2 = 43\ \ x_3 = 57,\ x_4 = 7,\ x_5 = 80,\ x_6 = 100$$

e

$$(-107)^5 + 43^5 + 57^5 + 7^5 + 80^5 + 100^5 = 0,$$

b) *Risoluzione in numeri interi del sistema:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0,$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 + x_7^3 = 0,$$
$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + x_7^5 = 0,$$

Noi otteniamo delle soluzioni di questo sistema ponendo

$$x_1 = ab(a - c)(b^2 + ac), \qquad x_2 = bc(b - a)(c^2 + ab),$$
$$x_3 = -c(a^4 - 2a^2b^2 + b^2c^2), \qquad x_4 = -(ac + ab + bc)(a^2c + ab^2 + bc^2),$$
$$x_5 = -b(c^4 - 2a^2c^2 + a^2b^2), \qquad x_6 = ac(a^2 + bc)(c - b),$$
$$r_7 = -a(a^2c^2 - 2b^2c^2 + b^4)$$

con la condizione che $a + b + c = 0$.

Ad es. per $a = -3$, $b = 2$, $c = 1$

si ha

$$x_1 = 24, \quad x_2 = -50, \quad x_3 = -13, \quad x_4 = -7,$$
$$x_5 = -38, \quad x_6 = 33, \quad x_7 = 51$$

c) *Soluzioni in numeri interi positivi del sistema:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2, \qquad x^3 + y^3 + z^3 = u^3 + v^3 + w^3.$$

Si ottengono soluzioni di questo sistema prendendo

$$x = 3p^2 + 24p + 2, \quad y = 9p^2 + 168p + 770, \quad z = 12p^2 + 180p + 672,$$
$$u = 3p^2 + 72p + 386, \quad v = 9p^2 + 120p + 386, \quad w = 12p^2 + 204p + 864.$$

Ad es. per $p = 0$ e dividendo i valori ottenuti per 2 si ha

$$x = 1, \quad y = 385, \quad z = 336, \quad u = v = 193, \quad w = 432.$$ [1]