Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Sbrana

Su una proprietà dei sistemi di vettori collegata con la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.4, p. 316–317.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_4_316_0>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Su una proprietà dei sistemi di vettori collegata con la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

Nota di Francesco Sbrana (a Genova).

Sunto. - *Vengono riprese le considerazioni contenute in una Nota precedente di* G. Aquaro *sullo stesso argomento indicato nel titolo.*

1. È notissimo come dal teorema di Cramer sui sistemi di equazioni lineari segua che se $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono n vettori complessi non nulli ad n componenti, linearmente indipendenti, cioè tali che l'equazione vettoriale nelle y linearmente

$$\sum_{1}^{n}{}_h\, a_h y_h = 0 \tag{1}$$

ammetta solo la soluzione $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$, dato ad arbitrio un altro vettore complesso non nullo b, l'equazione vettoriale nelle x

$$\sum_{1}^{n}{}_h\, a_h x_h = b, \tag{2}$$

ammette una ed una sola soluzione.

Una notevole dimostrazione di questo risultato, indipendente dalla teoria dei determinanti, ne è stata data di recente da G. Aquaro (1). Tale dimostrazione può essere presentata sotto la

(1) « Bollettino dell'U. M. I. », serie III, anno VI, n. 3, settembre 1951, pag. 240 e seguenti.

forma che segue, lievemente più semplice, e quindi forse più conveniente dal punto di vista didattico.

2. Applicando ai vettori a_h il processo di ortonormalizzazione di SCHMIDT risulta

$$a_h = \sum_{1}^{n} {}_r \, c_{hr} v_r \tag{3}$$

con $v_1\ v_2, \dots, v_n$ due a due ortogonali, e di norma unitaria, le c_{hr} costanti opportune, e

$$c_{hh} \neq 0, \tag{4}$$

[altrimenti si avrebbe tra gli a_h una relazione del tipo (1), con le y non tutte nulle].

Ciò premesso, dalle (2), (3) segue

$$\sum_{1}^{n} {}_r \, z_r v_r = b, \tag{5}$$

con

$$z_r = \sum_{r}^{n} {}_h \, c_{hr} x_h. \tag{6}$$

Dalla (5) si deduce che dev'essere

$$z_r = (v_r, b), \qquad \text{per } r = 1, 2, \dots, n. \tag{7}$$

Inversamente, se le z_r sono date dalla (7), si trova che la (5) è verificata, giacchè il sistema *trasposto* del sistema formato da $v_1, v_2, \dots, v_n$ è ortonormale, come è provato dal teorema I di G. AQUARO.

Facendo poi nella (6) $r = n, n-1, \dots, 1$, si trova

$$\begin{aligned} z_n &= c_{nn} x_n, \\ z_{n-1} &= c_{n-1\,n-1} x_{n-1} + c_{n\,n-1} x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_1 &= c_{11} x_1 + c_{21} x_2 + \dots + c_{n1} x_{n1}; \end{aligned}$$

da cui, per la condizione (4) si ricavano successivamente con un numero finito di operazioni razionali $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$.