Alessandro Ossicini

Sulle funzioni ultrasferiche di seconda specie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.4, p. 311–315.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_4_311_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Sulle funzioni ultrasferiche di seconda specie.

Nota di ALESSANDRO OSSICINI (a Roma).

Sunto. - *Si stabilisce un'espressione per le funzioni ultrasferiche di seconda specie analoga a quella del* RODRIGUES *relativa ai polinomi ultrasferici.*

1. L'integrale generale della

$$(1) \qquad (1 - x^2)y'' - (2\lambda + 1)xy' + n(n + 2\lambda)y = 0$$

è dato da

$$(2) \qquad y = AP_n^{(\lambda)}(x) +$$

$$+ B(x - 1)^{-n-\lambda-\frac{1}{2}}(x + 1)^{\frac{1}{2}-\lambda}F\left(n + \lambda + \frac{1}{2},\ n+1,\ 2n+2\lambda + 1,\ \frac{2}{1 - x}\right)$$

con

$$\lambda \neq -\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2} - \frac{1}{2},\ -\frac{n}{2} - 1, \ldots$$

ove A e B sono costanti arbitrarie, $P_n^{(\lambda)}(x)$ è il polinomio ultrasferico dato da

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m 2^{n-2m}\Gamma(n + \lambda - m)}{(n - 2m)!\, m!\, \Gamma(\lambda)} x^{n-2m}$$

e F (1) è la funzione ipergeometrica di GAUSS.

Ora per x arbitraria nel piano complesso tagliato lungo il seg-

(1) Cfr. G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una varia-*

mento $(-1, +1)$ e per $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, $n \geq 0$ (escluso $\lambda = n = 0$) chiamiamo funzione ultrasferica di seconda specie l'integrale non polinomio della (1) definito da

$$Q_n^{(\lambda)}(x) = \frac{2^{n+2\lambda-1}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(2n+2\lambda+1)}(x-1)^{-n-\lambda-\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}-\lambda}F\left(n+\right.$$
$$\left.+\lambda+\frac{1}{2},\ n+1,\ 2n+2\lambda+1,\ \frac{2}{1-x}\right).$$

La funzione ultrasferica di seconda specie (3) soddisfa alla relazione ricorrente

$$nQ_n^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda-1)xQ_{n-1}^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-2)Q_{n-2}^{(\lambda)}(x), \text{ (}^2\text{)}$$

valida per i polinomi $P_n^{(\lambda)}(x)$.

2. Stabiliamo ora una espressione della $Q_n^{(\lambda)}(x)$ analoga a quella del Rodrigues relativa ai polinomi $P_n^{(\lambda)}(x)$.

Si ponga nella (1)

$$y = z(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\lambda}, \tag{4}$$

si ha così la

$$(1-x^2)z'' - (3-2\lambda)xz' + (n+1)(n+2\lambda-1)z = 0, \tag{5}$$

il cui integrale generale è pertanto

$$z = C_1(x^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}P_n^{(\lambda)}(x) + C_2(x^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}Q_n^{(\lambda)}(x), \tag{6}$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie.

La (5) si può ottenere derivando n volte la

$$(1-x^2)u'' - (3-2\lambda-2n)xu' + (2\lambda+2n-1)u = 0, \tag{7}$$

il cui integrale generale è

$$u = D_1(x^2-1)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} + D_2(x^2-1)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{n+\lambda+\frac{1}{2}}}, \tag{8}$$

con D_1, D_2 costanti arbitrarie.

La x può avere qualsiasi valore che non sia reale e compreso tra ∓ 1.

[2] Cfr. G. Szegö, *Orthogonal Polinomials*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », XXIII, (New York, 1939) pag. 82.

Essendo

$$z = \frac{d^n u}{dx^n}$$

si ha anche

$$(9) \qquad z = M_1 \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} + M_2 \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{n+\lambda+\frac{1}{2}}},$$

con M_1, M_2 costanti arbitrarie.

Se confrontiamo la (6) con la (9) ricaviamo

$$(10) \qquad P_n^{(\lambda)}(x) = K_1(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^{n+\lambda-\frac{1}{2}},$$

$$(11) \qquad Q_n^{(\lambda)}(x) = K_2(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d}{dx^n}(x^2 - 1)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{n+\lambda+\frac{1}{2}}}.$$

La costante K_1 della (10) è data da [3]

$$K_1 = \frac{1}{n!\,2^n} \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(n + \lambda + \frac{1}{2}\right)}.$$

Per determinare la costante K_2, se supponiamo $|x|$ grande, il termine principale in (11) ha l'espressione

$$K_2 \frac{(-1)^n n!}{2(n+\lambda)} \frac{1}{x^{n+2\lambda}},$$

e poichè nella (3) il termine principale è

$$\frac{2^{2\lambda+n-1}\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + \lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(2n + 2\lambda + 1)} \cdot \frac{1}{x^{n+2\lambda}}$$

ne segue che

$$(12) \qquad K_2 = \frac{(-1)^n 2^{2\lambda+n-1}\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + \lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma(n + 2\lambda)}{n!\,\Gamma(2\lambda)\Gamma(2n + 2\lambda)};$$

se poi teniamo conto della formula di duplicazione del LEGENDRE [4]

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z),$$

(3) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. Parte prima. (Bologna 1948), pag. 164.

(4) Cfr. M. LEGENDRE. *Traité des functions elliptiques et des integrales*

la (12) diviene

$$K_2 = \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\lambda)}{2^n n!\,\Gamma(2\lambda)\Gamma(\lambda+n)},$$

così che si ha la formula

$$(13) \qquad Q_n^{(\lambda)}(x) =$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\lambda)}{2^n n!\,\Gamma(2\lambda)\Gamma(\lambda+n)} (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{n+\lambda+\frac{1}{2}}}$$

Questa formula è valida per qualsiasi valore di x che non sia reale e compreso tra ∓ 1.

Nel caso in cui x è reale e compreso tra ∓ 1 conviene definire $Q_n^{(\lambda)}(x)$ per mezzo della relazione

$$(14) \qquad (-1)^{E\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)} Q_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{2}\left\{ e^{-i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi} Q_n^{(\lambda)}(x+0i) + e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi} Q_n^{(\lambda)}(x-0i) \right\},$$

ove il simbolo $E\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$ indica la parte intera del numero $\lambda - \frac{1}{2}$.

È chiaro che $Q_n^{(\lambda)}(x)$ così definita soddisfa all'equazione differenziale (1) per valori reali della x.

Ora abbiamo

$$(15) \qquad Q_n^{(\lambda)}(x \pm 0i) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\lambda)}{2^n n!\,\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda)} (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{n+\lambda+\frac{1}{2}}}.$$

Nell'integrale l'integrazione è presa dal punto x all'∞ lungo linee sopra o sotto l'asse reale delle x secondo che si consideri il segno superiore od inferiore in $\pm 0i$.

Poichè detto integrale può essere preso da 0 a x lungo l'asse reale e da 0 a $+i\infty$ o $-i\infty$ lungo l'asse immaginario, noi abbiamo

$$(16) \qquad Q_n^{(\lambda)}(x \pm 0i) = \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\lambda)}{2^n n!\,\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda)} e^{\pm i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi} (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d^n}{dx^n}$$

$$\left\{(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{n+\lambda+\frac{1}{2}}} \mp (1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{i\,dw}{(w^2+1)^{n+\lambda+\frac{1}{2}}}\right\},$$

e siccome è

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(w^2+1)^{n+\lambda+\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+\lambda)}{2\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)},$$

impiegando l'espressione del RODRIGUES per $P_n^{(\lambda)}(x)$ si ha:

$$(17)\quad Q_n^{(\lambda)}(x \pm 0i) = \frac{(-1)^n\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\lambda)}{2^n n!\,\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda)} e^{\pm i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} \Bigg\{ \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{n+\lambda+\frac{1}{2}}} \Bigg\} \mp \frac{1}{2}\pi i e^{\pm i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi} P_n^{(\lambda)}(x).$$

Per la (14) infine ne segue che

$$(18)\quad Q_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(-1)^{n-E\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\lambda)}{2^n n!\,\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda)} (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{n+\lambda+\frac{1}{2}}}$$

la quale è analoga alla formula del RODRIGUES relativa ai polinomi $P_n^{(\lambda)}(x)$.

Dalla (17) si ha inoltre

$$(19)\quad e^{-i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi} Q_n^{(\lambda)}(x+0i) - e^{i\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\pi} Q_n^{(\lambda)}(x-0i) = -\pi i P_n^{(\lambda)}(x).$$

Nel caso particolare $\lambda = \frac{1}{2}$ si ha dalla (13) la

$$(20)\quad Q_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}},$$

valida per qualsiasi valore di x che non sia reale e compreso tra ± 1, e dalla (18) la

$$(21)\quad Q_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{n+1}},$$

valida per x reale e compreso tra ± 1.

Le (20), (21) sono le formule relative alla funzione di LEGENDRE di seconda specie