Bollettino
Unione Matematica Italiana

Tristano Manacorda

Sul comportamento asintotico di una classe di equazioni differenziali lineari non omogenee.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.4, p. 304–311.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_4_304_0>

Sul comportamento asintotico di una classe di equazioni differenziali lineari non omogenee.

Nota di Tristano Manacorda (a Firenze).

Sunto. - *Si dimostra che, sotto opportune ipotesi, l'integrale dell'equazione* $x'' + f(t)x = \varphi(t)$ *tende asintoticamente all'integrale generale dell'equazione* $x'' = \varphi(t)$.

1. A. Wintner ha provato di recente ([1]) che l'integrale generale dell'equazione

$$u''(t) + f(t)u(t) = 0, \tag{1}$$

nell'ipotesi che per $t \geq t_0$ sia

$$\int^{\infty} f(t)dt = \lim_{T_1 \to \infty} \int^{\infty} f(t)dt \quad \text{finito}; \quad \int^{T} \left| \max_{t \leq u < \infty} \left| \int_{u}^{\infty} f(s)ds \right| \right| dt < \infty, \quad t \geq t_0, \tag{1'}$$

assume asintoticamente la forma

$$u(t) = c_1 t + c_2 + o(t), \qquad c_2 \text{ e } c_2 \text{ costanti}, \quad t \geq t_0, \tag{1''}$$

migliorando così un noto criterio di Bôcher e Weyl. In questa nota, estendendo e adattando opportunamente il metodo di Wint-

(11) Mi sono trattenuto sul risultato enunciato, per quanto essa sia molto semplice, soltanto perchè considerazioni del tipo di quelle fatte si applicano anche ad altri casi.

(1) A. Wintner, On almost free linear motions - Amer. Journ. of

NER, si dimostra un risultato analogo per il caso di una equazione lineare non omogenea.

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$x'' + f(t)x = \varphi(t), \tag{2}$$

con $f(t)$ e $\varphi(t)$ funzioni continue per $t \geq t_0$. Sia

$$x_0(t) = \int^t (t - \tau)\varphi(\tau)d\tau, \tag{3}$$

di modo che x_0 è una soluzione particolare dell'equazione $x'' = \varphi\, t)$. Se si pone

$$x(t) = x_0(t) + u(t),$$

u soddisfa all'equazione

$$u'' + f(t)u = \psi(t), \qquad \psi(t) = -x_0(t)f(t). \tag{4}$$

Il comportamento asintotico dell'integrale generale della (2) è noto quando sia noto quello dell'integrale generale della (4). Proveremo la seguente proposizione: *Nella* (4) *le funzioni* f(t) *e* ψ(t) *soddisfino, per* $t \geq t_0$, *alle condizioni:* I) *Siano finiti gli integrali*

$$\int^\infty f(t)dt = \lim_{T \to \infty} \int^T f(t)dt; \qquad \int_C^\infty \psi(t)dt = \lim_{T \to \infty} \int^T \psi(t)dt; \tag{5}$$

II) *Si abbia*

$$\int^\infty \left| \max_{t \leq \tau < \infty} \left| \int_\tau^\infty f(s)ds \right| \right| dt < \infty; \qquad \int^\infty \left| \int_t^\infty \psi(\tau)\, d\tau \right| dt < \infty. \tag{6}$$

In queste ipotesi l'integrale generale della (4) ***assume asintoticamente la forma***

$$u(t) = c_1 t + c_2 + o(t), \tag{7}$$

e quindi quello della (2) la forma

$$x(t) = x_0(t) + c_1 t + c_2 + o(t). \tag{8}$$

Sapendo già, per i risultati di WINTNER, che l'equazione omogenea associata alla (4) ha due integrali particolari indipendenti della forma $u_1 = t + o(t)$, $u_2 = 1 + \varepsilon(t)$ con $\lim\limits_{t \to \infty} \varepsilon = 0$, basta determinare il comportamento asintotico di un integrale particolare della (4). Proveremo che *nelle ipotesi* (5) *e* (6) *esiste un integrale particolare* v(t) *della* (4) *che soddisfa alle condizioni :*

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = 1, \qquad \lim_{t \to \infty} v'(t) = 0, \qquad [v' = dv/dt]. \tag{9}$$

3. Per le ipotesi fatte hanno significato, per $t \geq t_0$, le funzioni

$$(10)\qquad F(t) = \int_t^\infty f(\tau)\,d\tau, \qquad G(t) = \max_{t \leq s < \infty} |F(s)|, \qquad H(t) = \int_t^\infty G(\tau)\,d\tau.$$

$$\Psi(t) = \int_t^\infty \psi(\tau)\,d\tau, \qquad K(t) = \int_t^\infty |\Psi(\tau)|\,d\tau,$$

che tutte tendono a zero per $t \to \infty$. Inoltre $G(t)$ e $H(t)$ sono non crescenti.

Ciò premesso, si consideri l'equazione integrale

$$(11)\qquad v'(t) = F(t)v(t) + \int_t^\infty F(\tau)v'(\tau)\,d\tau - \Psi(t), \qquad [v' = dv/dt].$$

È facile vedere con una derivazione, che ogni soluzione della (11) è anche soluzione della (4). Per costruire una soluzione della (11) ricorriamo ad un procedimento ricorrente ponendo

$$(12)\qquad v_0 = 1, \qquad v_1 - v_0 = -\int_t^\infty [F(\tau) - \Psi(\tau)]\,d\tau,$$

ed in generale

$$(13)\qquad v_{n+1} - v_n = -\int_t^\infty F(\tau)[v_n - v_{n-1}]\,d\tau - \int_t^\infty d\tau \int_\tau^\infty F(s)[v'_n - v'_{n-1}]\,ds.$$

Per poter scrivere le (12) e (13) occorre dimostrare che gli integrali a secondo membro sono convergenti, nelle ipotesi (10), per ogni n. Per la (12) si ha

$$\left|\int_t^\infty [F(\tau) - \Psi(\tau)]\,d\tau\right| \leq \int_t^\infty |F(\tau)|\,d\tau + \int_t^\infty |\Psi(\tau)|\,d\tau \leq H(t) + K(t).$$

Si ottiene quindi che l'integrale a secondo membro della (12) è convergente e risulta perciò definita la funzione $v_1 - v_0$. Anzi, si ha

$$(14_1)\qquad \lim_{t \to \infty} (v_1 - v_0) = 0.$$

Derivando la (12) si ha anche

$$(15_1)\qquad v'_1 = F(t) - \Psi(t), \qquad \lim_{t \to \infty} v'_1 = 0.$$

Se poniamo

$$(16_1)\qquad w_1 = \int_t^\infty |v'_1|\,d\tau = \int_t^\infty |v'_1 - v'_0|\,d\tau,$$

si ha anche

$$(17_1)\qquad w_1(t) = \int_t^\infty |F(\tau) - \Psi(\tau)|\,d\tau \leq H(t) + K(t),$$

e perciò
$$\lim_{t \to \infty} w_1(t) = 0.$$

Dalla definizione risulta poi immediatamente che w_1 è funzione non crescente di t e che si ha:

$$(18_1) \qquad | v_1(t) - v_0 | \leq w_1(t).$$

Passiamo alla seconda iterazione. Dalla (13), per $n = 1$, si ha che il secondo membro è in valore assoluto minore di

$$\int_t^\infty | F(\tau) \| v_1(\tau) - v_0 | \, d\tau + \int_t^\infty d\tau \int_\tau^\infty | F(s) \| v'_1(s) \, ds.$$

Ora, dalla (18_1) e (10) si ha

$$\int_t^\infty | F(\tau) \| v_1 - v_0 | \, d\tau \leq \int_t^\infty | F(\tau) | \, w_1(\tau) d\tau \leq w_1(t) \int_t^\infty | F(\tau) | \, d\tau \leq w_1(t) H(t)$$

$$\int_t^\infty d\tau \int_\tau^\infty | F(s) \| v'_1 | \, ds \leq \int_t^\infty d\tau \int_\tau^\infty G(s) \, | v'_1 | \, ds \leq \int_t^\infty G(\tau) w_1(\tau) d\tau \leq w_1(t) H(t).$$

Risulta quindi che anche la funzione $v_2 - v_1$ esiste ed anzi si ha

$$| v_2(t) - v_1(t) | \leq 2H(t) w_1(t)$$

perciò ancora $\lim_{t \to \infty} (v_2 - v_1) = 0$. Si ha anche, derivando la (13) per $n = 1$

$$v'_2(t) - v'_1(t) = F(t)[v_1 - v_0] + \int_t^\infty F(\tau) v'_1(\tau) d\tau,$$

e quindi

$$(15_2) \qquad | v'_2 - v'_1 | \leq 2G(t) w_1(t),$$

e quindi ancora $\lim_{t \to \infty} (v'_2 - v'_1) = 0$. Posto, in analogia alla (16_1),

$$(16_2) \qquad w_2(t) = \int_t^\infty | v'_2(\tau) - v'_1(\tau) | \, d\tau,$$

si ottiene

$$(17_2) \qquad w_2(t) \leq 2H(t) w_1(t), \qquad \lim_{t \to \infty} w_2 = 0,$$

$$(18_2) \qquad | v_2(t) - v_1(t) | \leq w_2(t) < 2H(t) w_1(t).$$

Procedendo ora per induzione, supposte vere le formule (14)-(18) per $n = 1, 2, \ldots, N - 1$, dimostrandole vere per $n = N$.

Il secondo membro della (13), per $n = N$, è in valore assoluto minore di

$$\int_t^\infty |F(\tau)|\,|v_N - v_{N-1}|\,d\tau + \int_t^\infty d\tau \int_\tau^\infty |F(s)|\,|v'_N - v'_{N-1}|\,ds .$$

Ora si ha

$$\int_t^\infty |F(\tau)|\,|v_N - v_{N-1}|\,d\tau \leq \int_t^\infty w_N(\tau)\,|F(\tau)|\,d\tau \leq w_N(t)H(t),$$

$$\left[w_N = \int_t^\infty |v'_N - v'_{N-1}|\,d\tau\right];$$

$$\int_t^\infty d\tau \int_\tau^\infty |F(s)|\,|v'_N - v'_{N-1}|\,ds \leq \int_t^\infty G(\tau)d\tau \int_\tau^\infty |v'_N - v'_{N-1}|\,ds \leq w_N(t)H(t),$$

e perciò la funzione $v_{N+1} - v_N$ esiste e si ha

$$|v_{N+1} - v_N| \leq 2H(t)w_N, \qquad \lim_{t \to \infty} (v_{N+1} - v_N) = 0.$$

Analogamente

$$(15_{N+1}) \qquad |v'_{N+1} - v'_N| \leq 2G(t)w_N, \qquad \lim_{t \to \infty} (v'_{N+1} - v'_N) = 0.$$

$$(17_{N+1}) \qquad w_{N+1} \leq 2H(t)w_N .$$

$$(18_{N+1}) \qquad |v_{N+1} - v_N| \leq w_{N+1}$$

Con ciò le formule (13) risultano giustificate per ogni n. Anzi. dalle (17) si ottiene immediatamente

$$(19) \qquad w_{n+1} \leq [2H(t)]^n w_1 .$$

Poichè $H(t)$ tende a zero per $t \to \infty$, può supporsi che per $t \geq t_0$ sia $2H(t) < 1/2$, di modo che la (19) diviene

$$(19') \qquad w_{n+1} \leq w_1 / 2^n,$$

ed anche, per (18) e (15)

$$(20) \qquad |v_{n+1} - v_n| \leq w_1 / 2^n, \qquad |v'_{n+1} - v'_n| \leq 4G(t)w_1 / 2^n$$

Risulta quindi che le serie $v_0 + \sum_0^\infty (v_{n+1} - v_n)$ e $\sum_0^\infty (v'_{n+1} - v'_n)$ sono assolutamente e uniformemente convergenti, ed avendosi

$$v_{n+1} = v_0 + \sum_0^n (v_{k+1} - v_k), \qquad v'_{n+1} = \sum_0^n (v'_{k+1} - v'_k),$$

anche le successioni $\{v_n\}$ e $\{v'_n\}$ convergono uniformemente. Posto

$$v(t) = \lim_{n \to \infty} v_n = v_0 + \sum_0^\infty (v_{k+1} - v_k), \qquad v'(t) = \lim_{n \to n} v'_n = \sum_0^\infty (v'_{k+1} - v'_k),$$

v' è la derivata di v e si ha

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = 1, \qquad \lim_{t \to \infty} v'(t) = 0. \tag{21}$$

Dalle (13), sommando membro a membro, si vede che la successione $\{v_n\}$ costituisce una successione di successive approssimazioni per la (11), si ha cioè

$$v'_{n+1} = F(t)v_n + \int_t^\infty F(\tau)\, v'_n d\tau - \Psi(t).$$

Da questa, passando al limite per $n \to \infty$, per la uniforme convergenza della successioni $\{v_n\}$ e $\{v'_n\}$ si vede che la funzione $v(t)$ è una soluzione della (11), e perciò anche della (4). Per le (21), $v(t)$ soddisfa alle (9) e quindi la nostra proposizione è completamente provata.

4. È ovvio, che se le condizioni (5) e (6) sono soddisfatte dalla $\varphi(t)$, si può scrivere direttamente la (7) per l'integrale $x(t)$ della (2). Può darsi però, che le (5) e (6) non siano soddisfatte da $\varphi(t)$, ma invece dalla $\psi(t)$.

Questo ad es. accade quando si abbia

$$|f(t)| \leq a/t^{2+\rho}, \qquad \varphi(t) = \operatorname{sen} t, \qquad a \text{ e } \rho \text{ costanti positive.} \tag{22}$$

quindi $x_0(t) = -\operatorname{sen} t$. In questo caso, $\varphi(t)$ non è integrabile tra t_0 e ∞, mentre invece le (5) e (6) sono soddisfatte da $f(t)$ e $\psi(t)$. Lo stesso accade, più in generale, quando $f(t)$ soddisfa alla (22) e $x_0(t)$ è una funzione limitata di t,

$$|x_0(t)| \leq L, \qquad L \text{ costante}, \qquad t \geq t_0.$$

Si ha infatti in tal caso

$$|F(t)| \leq \frac{a}{1+\rho} \frac{1}{t^{1+\rho}}, \quad G(t) \leq \frac{a}{1+\rho} \frac{1}{t^{1+\rho}}, \quad H(t) \leq \frac{a}{\rho(1+\rho)} t^{-\rho},$$

$$|\Psi(t)| \leq \frac{La}{1+\rho} \frac{1}{t^{1+\rho}}, \quad K(t) \leq \frac{La}{\rho(1+\rho)} t^{-\rho}.$$

In questo caso si viene a generalizzare e migliorare un classico teorema sul comportamento asintotico degli integrali di un'equazione lineare omogenea [2]

5. Nel lavoro citato, WINTNER ha dato una dimostrazione elementare del fatto che se nella (1) $f(t)$ conserva sempre lo stesso segno, allora le (1') divengono necessarie, oltre che sufficienti, per la validità della (1''). Adoperando ancora il ragionamento dello stesso Autore, vogliamo ora provare che *se nella* (4) *per* $t \geq t_0$, $f(t)$ *conserva sempre lo stesso segno e si ha*

$$(23) \qquad |x_0(t)| = \left|\int^t (t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\right| \leq 1-d, \qquad d \text{ costante positiva,}$$

allora le (5) *e* (6) *divengono anche nécessarie per la validità della* (7).

Cominciamo con l'osservare, con WINTNER (loc. cit. pag. 596) che la prima della (6) può ora scriversi

$$(24) \qquad \int^\infty t\, f(t)\, dt \text{ limitato,}$$

e che, per la (23), questa sola relazione equivale alle (5) e (6) insieme.

Basterà quindi provare che, se esiste una soluzione $v(t)$ della (4) che soddisfa le (9), deve valere la (24).

Per assurdo: supponiamo che una tale soluzione esista e che la (24) non sia verificata. Dalla (4) si ha

$$tv'' = -t\, f(t)[x_0 + v].$$

Poichè $\lim_{t\to\infty} v = 1$ e $|x_0| < 1$, si vede che esiste un t_1 tale che per $t \geq t_1$ il secondo membro ha il segno (costante) di $-f(t)$, e che quindi v' è per $t \geq t_1$ funzione monotona di t, e conserva quindi per $t \geq t_2$ con t_2 sufficientemente grande, anch'essa sempre lo stesso segno.

Integrando la relazione precedente si ottiene

$$\int_{t_1}^t \tau f(\tau)[x_0 + v]d\tau = \int_{t_1}^t v'' d\tau = tv' - v + \text{cost.}$$

Ora, la funzione integranda a primo membro ha, per $t \geq t_1$,

[2] Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, II, pag. 41, (Bologna, 1941).

segno costante, ne segue che l'integrale è una funzione monotona di t ed ammette perciò limite per $t \to \infty$. Se questo limite fosse finito, sarebbe finito anche l'integrale (24) contro l'ipotesi. Si ha dunque $\lim_{t \to \infty} \left| \int_{t_1}^{t} \tau f(\tau)[x_0 + v] d\tau \right| = +\infty$, e perciò, $\lim_{t \to \infty} t v' = \pm \infty$. Ma allora, fissata una costante k, esiste un t_3 tale che per $t \geq t_3$ è

$$tv' > k, \qquad [tv' < k], \qquad k > 0$$

e quindi $\lim_{t \to \infty} v(t) = \infty$ contro l'ipotesi.