Luigi Muracchini

# Ricerche sulle varietà quasi-asintotiche. II. Quasi-asintotiche $\sigma_{r,s}$ di specie massima.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **6** (1951), n.4, p. 299–304.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_4_299_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

## Ricerche sulle varietà quasi-asintotiche.
## II. Quasi-asintotiche $\sigma_{r,s}$ di specie massima.

Nota di Luigi Muracchini (a Bologna).

**Sunto.** - *Si studiano le condizioni affinchè una varietà* $V_k$ *possegga assegnate totalità di calotte* h*-dimensionali a carattere di quasi-asintotica* $\sigma_{r,s}$ *di specie massima.*

**1.** In una Nota precedente ([1]) ho stabilito alcune proposizioni sulle varietà subordinate (e loro calotte) quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$ per una $V_k$. Come ho detto in quella Nota intendo trattare, relativamente alla $V_h$ $(h > 1)$ quasi-asintotiche, quei problemi che il prof.

([1]) Questo « Bollettino », S. III, A. VI, pp. 198-206, (1951). Per il significato dei termini adoperati nella presente Nota e per le notazioni. si veda il citato lavoro.

M. VILLA ha affrontato in alcuni lavori (2) per le curve quasi-asintotiche. Quì mi occuperò soltanto delle quasi-asintotiche di specie massima. Il risultato del n. 2 relativo alle varietà di VERONESE e quello con cui termina il presente lavoro sono estensioni di risultati del VILLA sulle curve quasi-asintotiche e lasciano intravvedere la possibilità che altri di quei risultati continuino a valere quando si passi dalle curve alle varietà quasi-asintotiche. Il risultato del n. 3 invece non ha l'analogo nel caso delle curve.

**2.** Il problema da esaminare si enuncia, nei termini più generali, come segue: *determinare la varietà* $V_k$ *che posseggono* $\infty^{\delta}$ *calotte* $h$*-dimensionali, di ordine* $s-r$, $\sigma_h^{s-r}$. *di quasi-asintotica* $\sigma_{r,s}$, *di specie massima* $\tau_{h,s}$ $\left[\tau_{h,s}=\binom{h+s-1}{s}\right]$ (3), *per ogni calotta* $h$*-dimensionale, d'ordine* $s-r-1$, $\sigma_h^{s-r-1}$, *con* $0\leq\delta\leq$ $\leq(k-h)\binom{h+s-r-1}{s-r}$ (4). Un primo passo verso la soluzione del problema consiste nel tradurlo in un sistema di equazioni alle derivate parziali (lineari ed omogenee) le cui varietà integrali sono quelle cercate. Per evitare eccessive complicazioni formali ci limiteremo a particolari valori di $r$ ed $s$; i procedimenti che seguiremo si possono tuttavia applicare anche in casi più generali.

Anzitutto alcune osservazioni sul caso $r=s-1$. Si possono applicare a questo caso considerazioni del tutto analoghe a quelle della Nota citata in (1), dove si tratta delle quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$ di specie massima. Sussistono proposizioni i cui enunciati si ottengono dagli enunciati della Nota predetta sostituendo alle equazioni

(2) Si veda: *Ricerche sulle curve quasi-asintotiche*, « Rend. Lincei », S. 6, vol. 28, pp. 246-256 e 302-310, (1930). Si vedano inoltre i lavori citati nella op. cit. in (1).

(3) Ometteremo l'indice, che solitamente indica la specie, nel simbolo $\sigma_{r,s}$; è inteso infatti che nel presente lavoro la specie ha il suo valore massimo, indicato nel testo.

(4) Per poter esprimere che una calotta di $V_k$ è di quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ (di specie qualsiasi) occorre che essa sia d'ordine $s-r$, come si vede subito dall'espetto analitico delle condizioni. Queste mostrano pure che l'imporre ad una $V_k$ di possedere meno calotte $\sigma_k^{r-s}$, di quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ (di specie massima), di quante se ne esigono nell'enunciato del nostro problema, per $\delta=0$, non si traduce in equazioni alle derivate parziali che la $V_k$ debba soddisfare. Così accade, ad esempio, quando si imponga ad una superficie di possedere soltanto un numero finito di curve asintotiche. È pertanto chiaro che le limitazioni assegnate per $\delta$ nell'enunciato del nostro problema sono necessarie affinchè esso abbia veramente interesse.

di LAPLACE, equazioni lineari ed omogenee d'ordine $s$, alle iperquadriche associate alle prime, ipersuperficie d'ordine $s$ associate alle altre ed agli spazi lineari doppi per le quadriche, spazi lineari $s$-pli per la ipersuperficie. Fra l'altro si ha:

*Se ogni calotta* $\sigma_h^1$ *di una varietà* $V_k$ *è* $\sigma_h^1$ *di* $\sigma_{s-1,s}$, *di specie massima, la* $V_k$ *appartiene allo* $S(s-1)$*-osculatore in un suo punto generico.*

Osserviamo che una calotta $\sigma_h^{s-r}$ di $\sigma_{r,s}$, di specie massima, è anche calotta di $\sigma_{m,s}$ (sempre di specie massima) per ogni $r \leq m \leq \leq s-1$ (5). Segue che: *se per ogni calotta* $\sigma_h^1$ *di una* $V_k$ *passa una calotta* $\sigma_h^{s-r}$ *di* $\sigma_{r,s}$ *di specie massima, la* $V_k$ *appartiene allo* $S(s-1)$*-osculatore in un suo punto generico.*

Passiamo ora al caso $r = s-2$; sussiste la seguente proposizione di carattere locale: lo $S(s-2)$-osculatore ad una $V_k$ sia regolare in un suo punto e sia data una calotta $\sigma^1_{h-1}$ per quel punto. Se per ciascuna delle $\infty^{k-h}$ calotte $\sigma_h^1$, contenenti la $\sigma^1_{h-1}$, passa una calotta $\sigma_h^2$ di $\sigma_{s-2,s}$ (di specie massima), le $\infty^{k-h}$ calotte $\sigma_h^2$ hanno a comune una calotta $\sigma^2_{h-1}$, che è calotta di $\sigma_{s-2,s}$ di specie massima. Ho dato altrove (6) una dimostrazione della precedente proposizione, per $k=3$, $s=3$, $h=2$. estendibile senza difficoltà a $k$, $s$, $h$ qualsiansi. Ometterò pertanto la dimostrazione. Come ho fatto nella op. cit. in (6) si dimostra poi, tenuto conto di un classico risultato del BOMPIANI (7), che: le uniche $V_k$ che posseggono una calotta $\sigma_h^2$ di $\sigma_{s-2,s}$ (di specie massima) per ogni calotta $\sigma_h^1$ ed hanno lo $S(s-2)$-osculatore regolare in ogni punto sono le $V_k^{(s-1)^k}$ del VERONESE che rappresentano le $V_{k-1}^{s-1}$ di $S_k$. Queste ultime varietà posseggono anzi varietà $V_h$ quasi-asintotiche $\sigma_{s-2,s}$ e quindi calotte di tali varietà di qualsiasi ordine. L'osservazione fatta poco sopra permette (8) di concludere che:

*Le uniche varietà* $V_k$ *che posseggono una calotta* $\sigma_h^{s-r}$ *di quasi-asintotica* $\sigma_{r,s}$ *di specie massima, per ogni calotta* $\sigma_h^1$ *e che appartengono ad uno spazio avente la massima dimensione compatibile con quella ipotesi, sono la* $V_k^{(s-1)^k}$ *del Veronese.*

(5) Ciò si vede ragionando in modo analogo a quello del VILLA in op. cit. in (2), pag. 250. Avvertiamo una volta per tutte che intendiamo sempre che gli indici delle quasi-asintotiche abbiano effettivamente il valore indicato e non un valore inferiore.

(6) In una Comunicazione al IV° Congresso U. M. I. dal titolo: *Sulle varietà del Veronese.*

(7) E. BOMPIANI, *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici.* « Mem. Acc. Lincei », S. 5, v. 13, pag. 474, (1922).

(8) Anche qui si deve ragionare come ha fatto il VILLA in op. cit. in (2), pag. 253.

**8.** Limitiamoci ora a considerare le quasi-asintotiche $\sigma_{1,3}$; l'estensione alla $\sigma_{s-2,s}$ presenta soltanto semplici difficoltà formali. Sia $x(u_1, \dots, u_h, z_1, \dots, z_{k-h})$ il punto che descrive una $V_k$; una $V_h$ di $V_k$ sia data mediante le

$$z_\alpha = z_\alpha(u_1, \dots u_h). \qquad (\alpha = 1, \dots, k-h)\ [9]$$

Poniamo:

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial u_i} = p_i^\alpha, \qquad \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial u_i \partial u_j} = r_{ij}^\alpha;$$

$$(i) = \frac{\partial x}{\partial u_i}, \qquad (\alpha) = \frac{\partial x}{\partial z_\alpha}, \qquad (ij) = \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$$

e così via. Inoltre sia:

$$(1) \qquad [ij] = \{(i) + \sum_\alpha p_i^\alpha(\alpha)\} \cdot \{(j) + \sum_\beta p_j^\beta(\beta)\}$$

$$(2) \qquad [ijl] = \{(i) + \sum_\alpha p_i^\alpha(\alpha)\} \cdot \{(j) + \sum_\beta p_j^\beta(\beta)\} \cdot \{(l) + \sum_\gamma p_l^\gamma(\gamma)\}.$$

$$\Gamma_m^\alpha = (\alpha m) + \sum p_m^\gamma(\alpha\lambda)$$

dove nelle (1) e (2) i prodotti sono i soliti prodotti simbolici di operatori differenziali (le derivazioni non sono da applicarsi alle $p$).

Una calotta $\sigma_h^2$ è determinata dai relativi valori delle $p$ ed $r$, affinchè sia calotta di $\sigma_{1,3}$ di specie massima debbono annullarsi le matrici:

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} S\,1) \\ [11] \\ \vdots \\ [hh] \\ [ijl] + \sum\limits_\alpha r_{ij}^\alpha \Gamma_l^\alpha + \sum\limits_\alpha r_{il}^\alpha \Gamma_j^\alpha + \sum\limits_\alpha r_{jl}^\alpha \Gamma_i^\alpha \end{matrix} \right\| \qquad (i, j, l = 1, \dots, h)$$

dove $S(1)$ indica $k+1$ righe formate da $x$ ed i suoi derivati primi.

Una qualsiasi delle $r_{ij}^\alpha$ compare in $h$ delle matrici (3) ed in ciascuna ha un coefficiente diverso (eguale, a meno di un fattore numerico inessenziale, ad uno dei $\Gamma^\alpha$). Si vede subito che se nessuna delle matrici.

$$(4) \qquad \left\| \begin{matrix} S(1) \\ [11] \\ \vdots \\ [hh] \\ \Gamma_m^\alpha \end{matrix} \right\| \qquad (\alpha = 1, \dots, k-h;\ m = 1, \dots, h)$$

[9] Indichiamo con lettere greche gli indici delle $z$, che variano da 1 a $k-h$; con lettere latine gli indici delle $u$, che variano da 1 ad $h$.

è identicamente nulla rispetto alle $p_i^\alpha$ non vi può essere più di una calotta $\sigma_h^2$ di $\sigma_{1,3}$ per una generica $\sigma_h^1$ di $V_k$, quando sia $h > \left[\frac{3k-2}{4}\right]$ [10]. In questo caso, se si vuole che per la generica $\sigma_h^1$ passino $\infty^\delta$ calotta $\sigma_h^2$ di $\sigma_{1,3}$, debbono le matrici (3) essere identicamente nulle rispetto alle $p_i^\alpha$ ed a $\delta$ fra le $r_{ij}^\alpha$, come si vede senza difficoltà. Dato il modo, indicato prima, col quale le $r_{ij}^\alpha$ compaiono nelle (3) si conclude che:

*Per ogni calotta* $\sigma_h^1$ *di una* $V_k\left(h > \left[\frac{3k-2}{4}\right]\right)$ *possono passare* $\infty^\delta$ *calotte* $\sigma_h^2$ *di* $\sigma_{1,3}$ *di specie massima, soltanto per* $\delta = \rho\binom{h+1}{2}$ *con* $0 \leq \rho < k - h$.

Ci limitiamo alla precedente osservazione, atta a far rilevare la differenza fra ciò che accade quando $h$ è sufficientemente elevato, rispetto a $k$, e ciò che invece si ha negli altri casi.

Tralasciando l'investigazione delle numerose questioni, che sorgono spontaneamente da quanto sopra è stato esposto, terminiamo col *determinare* $V_k$ *per le quali ogni calotta* $\sigma_h^2$ *è calotta di* $\sigma_{1,3}$, *di specie massima.* Per tali $V_h$ debbono annullarsi tutte le (4) identicamente rispetto alla $p_i^\alpha$, pertanto la $V_k$ deve soddisfare ad un sistema di equazioni di LAPLACE avente un sistema lineare $\Lambda$ di quadriche (dello $S_{k-1}$) associate contenente, qualunque siano la $p_i^\alpha$, le quadriche

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij}(\theta_i + \sum_\alpha p_i^\alpha\theta_\alpha)(\theta_j + \sum_\alpha p_j^\alpha\theta_\alpha) + \mu\theta_\beta(\theta_l + \sum_\alpha p_l^\alpha\theta_\alpha) = 0 \tag{5}$$

dove $\beta = 1, \dots, k-h$; $l = 1, \dots, h$. Queste sono $h(k-h)$ quadriche linearmente indipendenti, passanti per lo $S_{h-k-1}$:

$$\theta_m + \sum_\alpha p_m^\alpha\theta_\alpha = 0 \qquad (m = 1, \dots, h). \tag{6}$$

Si conclude facilmente che il sistema lineare $\Lambda$ deve essere un generico sistema di dimensione $d = h(k-h) + \binom{k-h+1}{2} - 1$ e

[10] Le parentesi quadre indicano il massimo intero contenuto in $\frac{3k-2}{4}$. Per rendersi conto di quanto si dice nel testo occorre osservare che le (3) forniscono equazioni lineari nelle $r_{ij}^\alpha$, tali che le equazioni che risultano da una qualsiasi fra le (3) sono certamente indipendenti da quelle che risultano dalle altre matrici, se nessuna delle (4) si annulla. Inoltre si deve osservare che per $h > \left[\frac{3k-1}{4}\right]$ il numero delle matrici (3) supera quello delle $r_{ij}^\alpha$.

pertanto che $V_k$ soddisfa a $d+1$ equazioni di LAPLACE. Se si tien conto del principio del n. 2 si conclude che:

*Se ogni calotta* $\sigma_h^2 (1 \leq h \leq k-1)$ *di una* $V_k$ *è calotta di* $\sigma_{1,3}$ *di specie massima,* $V_k$ *appartiene ad uno* $S_N$ *con* $N = k + \binom{h+1}{2}$ (11).

In modo analogo si prova che:

*Se ogni calotta* $\sigma_h^2$ *di una* $V_k$ *è calotta di* $\sigma_{s-2,s}$ *di specie massima,* $V_k$ *appartiene ad una* $S_N$ *con* $N = (s-2)_k + \binom{h+s-2}{s-1}$, dove $(s-2)_k$ è la dimensione dello $S(s-2)$ — osculatore a $V_k$ in un suo punto generico.