ROBERTO CONTI

Un criterio sufficiente di stabilità per i sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine, omogenee.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.4, p. 288–293.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_4_288_0>

Un criterio sufficiente di stabilità per i sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine, omogenee.

Nota di ROBERTO CONTI (a Firenze).

Sunto. - *Il contenuto di questa Nota è riassunto nel seguente n. 1.*

1. Sia A una matrice costante (reale o complessa) di ordine n, $B(t)$ una matrice, pure di ordine n, i cui elementi siano funzioni (reali o complesse) della variabile reale $t \geq 0$; tali funzioni siano assolutamente continue in ogni intervallo finito e limitate per $t \to \infty$.

Supporremo che siano limitate per $t \to \infty$ tutte le soluzioni del sistema differenziale

$$(\mathrm{S}_0) \qquad \dot{y} = Ay$$

dove y è un vettore (reale o complesso) ad n componenti, $\dot{y}$ il vettore derivato, $\dot{y} = dy/dt$. Ciò equivale a supporre, com'è noto [1], che la matrice

$$e^{A\theta} = I + \frac{A\theta}{1!} + \frac{A^2\theta^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n\theta^n}{n!} + \ldots$$

resti limitata per $\theta \to \infty$, essendo I la matrice unitaria di ordine n.

Ciò ammesso vogliamo trovare delle condizioni che assicurino che anche le soluzioni del sistema

$$(\mathrm{S}) \qquad \dot{x} = [A + B(t)]\,x$$

siano tutte limitate per $t \to \infty$.

In quel che segue proveremo che:

Se tutte le soluzioni di (S_0) *sono limitate per* $t \to \infty$, *e se* $B(t)$ *è una matrice assolutamente continua, limitata per* $t \to \infty$, *affinchè anche tutte le soluzioni di* (S) *siano limitate per* $t \to \infty$. *è sufficiente che*

i) *esista una costante* $h > 0$ *tale che da un certo* $t_0 \geq 0$ *in poi sia*

$$(1) \qquad |\det[A + B(t)]| > h > 0 \qquad (t \geq t_0);$$

[1] Cfr. ad es.: G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale* Bologna, 1941, vol. I. pag. 81.

ii) *si abbia*

$$\int^{\infty} \| \dot{B}(\tau) + B(\tau)[A + B(\tau)] \| d\tau < \infty. \tag{2}$$

In quest'ultima relazione $\dot{B}(t)$ indica la matrice derivata di $B(t)$ e il simbolo $\| C \|$ applicato ad una qualunque matrice C ne rappresenta la « norma », ossia la somma dei moduli degli elementi di C.

Il seguente n. 2 è dedicato alla dimostrazione del criterio ora enunciato, del quale vien fatta poi (n. 3) un'applicazione alle equazioni differenziali lineari omogenee di ordine n; conclude la Nota (n. 4) un esempio atto a provare che il criterio può applicarsi in certi casi che sfuggono invece ad altri criteri che in questo genere di studi sono di uso frequente.

2. La dimostrazione è assai semplice.

Si verifica subito che la soluzione di (S) che per $t = t_0$ si riduce ad un vettore costante x^0 assegnato è anche la soluzione dell'equazione integrale, in forma vettoriale.

$$x = e^{A(t-t_0)}x^0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}B(\tau)x d\tau.$$

Moltiplicando ambo i membri di questa uguaglianza per A e ricordando che $de^{-At}/dt = -Ae^{-At}$, si ha

$$Ax = e^{A(t-t_0)}Ax^0 - e^{At}\int_{t_0}^{t} \frac{de^{-A\tau}}{d\tau} B(\tau)x d\tau,$$

e integrando per parti

$$Ax = e^{A(t-t_0)}Ax^0 - e^{At}[e^{-A\tau}B(\tau)x]_{t_0}^{t} + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}[\dot{B}(\tau)x + B(\tau)\dot{x}]d\tau.$$

Di qui, sviluppando e tenendo conto di (S), segue

$$\begin{aligned}[A + B(t)]x = e^{A(t-t_0)}[A + B(t_0)]x^0 + \\ + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} \{ \dot{B}(\tau) + B(\tau)[A + B(\tau)] \} x d\tau.\end{aligned} \tag{3}$$

Poichè la (1) assicura l'esistenza per $t \geq t_0$ della matrice $[A + B(t)]^{-1}$, inversa della $A + B(t)$, la (3) può scriversi anche

$$\begin{aligned}x = [A + B(t)]^{-1}e^{A(t-t_0)}[A + B(t_0)]x^0 + \\ + [A + B(t)]^{-1}e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} \{ \dot{B}(\tau) + B(\tau)[A + B(\tau)] \} x d\tau.\end{aligned} \tag{4}$$

Ora per la supposta limitatezza della matrice $e^{A\theta}$ per $\theta \geq 0$ e dalla (1), la quale, insieme con l'ipotesi che $B(t)$ sia limitata per $t \geq t_0$, garantisce che anche $[A + B(t)]^{-1}$ è limitata per $t \geq t_0$, segue l'esistenza di due numeri $M(t_0)$ ed $N(t_0)$, tali che

$$\|[A + B(t)]^{-1} e^{A(t-t_0)}[A + B(t_0)]\| \leq M(t_0), \qquad t \geq t_0;$$
$$\|[A + B(t)]^{-1}\| \, \| e^{A(t-\tau)}\| \leq N(t_0), \qquad t \geq t_0, \qquad t \geq \tau \geq t_0;$$

e perciò dalla (4) si ha

$$\| x \| \leq M(t_0) \| x^0 \| + \int_{t_0}^{t} N(t_0) \| \dot{B}(\tau) + B(\tau)[A + B(\tau)] \| \, \| x \| \, d\tau.$$

Applicando a questa disuguaglianza una nota generalizzazione del lemma di GRONWALL ([2]) avremo

$$\| x \| \leq M(t_0) \| x^0 \| \exp N(t_0) \int_{t_0}^{t} \| \dot{B}(\tau) + B(\tau)[A + B(\tau)] \| \, d\tau.$$

Dalla (2) segue l'asserto.

3. Del precedente criterio possiamo fare un'applicazione all'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n:

$$\text{(E)} \qquad y^{(n)} - \sum_{1}^{n}{}_{\iota} \, [a_\iota + b_\iota(t)] y^{(n-\iota)} = 0,$$

dove $y^{(n)} = d^n y / dt^n$, $y^{(n-\iota)} = d^{n-\iota} y / dt^{n-\iota}$, $y^{(0)} = y$ e dove le a_ι sono costanti e le $b_\iota(t)$ sono funzioni assolutamente continue in ogni intervallo finito della variabile, limitate per $t \to \infty$.

Con le posizioni consuete

$$y = x_1, \quad dy / dt = x_2, \quad d^2 y / dt^2 = x_3, \ldots, \quad d^{n-1} y / dt^{n-1} = x_n.$$

([2]) Cfr. R. BELLMAN, *The stability of solutions of linear differential equations*, « Duke Math. Jour. », 10 (1943), pp. 643-647; oppure: N. LEVINSON, *On stability of non-linear systems of differential equations*, « Colloquium Math. », II_1 (1949); pp. 40-45. L'enunciato del lemma generalizzato è il seguente: *Siano* f(t), g(t) *due funzioni reali non negative*, f(t) *continua*, g(t) *sommabile. Se esiste una costante* c > 0 *per cui è* $f(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} g(\tau) f(\tau) d\tau$, $t \geq t_0$, *allora è anche* $f(t) \leq c \exp \int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau$.

la (E) si riduce ad un sistema (S) con

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & I_{n-1} \\ 0 & \\ \hline a_n & a_{n-1} \ldots a_1 \end{array}\right), \qquad B(t) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & O_{n-1} \\ 0 & \\ \hline b_n(t) & b_{n-1}(t) \ldots b_1(t) \end{array}\right)$$

dove I_{n-1} è la matrice unitaria di ordine $n-1$, O_{n-1} quella nulla di ordine $n-1$. Pertanto avremo

$$|\det[A + B(t)]| = |a_n + b_n(t)|,$$

ed anche

$$\dot{B}(t) + B(t)[A + B(t)] = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & O_{n-1} \\ 0 & \\ \hline c_n(t) & c_{n-1}(t) \ldots c_1(t) \end{array}\right),$$

dove

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} c_1(t) = \dot{b}_1(t) + b_2(t) + b_1(t)[a_1 + b_1(t)], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n-1}(t) = \dot{b}_{n-1}(t) + b_n(t) + b_1(t)[a_{n-1} + b_{n-1}(t)], \\ c_n(t) = \dot{b}_n(t) + b_1(t)[a_n + b_n(t)]. \end{cases}$$

Abbiamo allora, dal criterio del n. 1, il seguente:

Se la soluzione dell'equazione a coefficienti costanti

$$(\mathrm{E}_0) \qquad z^{(n)} - \sum_{1}^{n} a_i z^{(n-i)} = 0$$

corrispondente ai dati iniziali $z(t_0) = z_1^0$, $\dot{z}(t_0) = z_2^0, \ldots, z^{(n-1)}(t_0) = z_n^0$. *è limitata per* $t \to \infty$ *[insieme con le sue derivate fino a quella di ordine* n *incluso* (3)*] la stessa proprietà vale per la soluzione della* (E) *individuata dai medesimi valori iniziali* $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0$, *se le* $b_i(t)$ *sono funzioni assolutamente continue in ogni intervallo finito della variabile, limitate per* $t \to \infty$ *e se, inoltre,*

i) *esiste una costante* $h > 0$ *tale che*

$$|a_n + b_n(t)| > h > 0, \qquad t \geq t_0;$$

(3) Se la soluzione è limitata per $t \to \infty$, lo stesso accade delle sue derivate fino alla n-ma in virtù di un teorema enunciato da ESCLANGON e provato in forma rigorosa e generale in E. LANDAU, *Ueber einen Satz von Herrn Esclangon*, « Math. Annalen », 102 (1930), pp. 177-188.

ii) *è*

$$\int^{\infty} \sum_{1}^{n}{}_{i} |c_i(\tau)|\, d\tau < \infty, \tag{6}$$

le $c_1(t)$, $c_2(t), \dots, c_n(t)$ *essendo definite dalle* (5).

4. Per meglio precisare il campo di applicabilità del criterio trovato in confronto con i noti criteri di HUKUHARA e di CESARI [4] consideriamo il seguente esempio.

Sia data l'equazione del secondo ordine

$$\ddot{y} + \frac{\operatorname{sen} \omega t}{t} \dot{y} + \left[\omega^2 - \omega \frac{\cos \omega t}{t^2} + \frac{\operatorname{sen} \omega t}{t^2}\right] y = 0, \tag{7}$$

con ω costante reale non nulla e $t \geq t_0 > 0$. Con i simboli del n. prec. si ha

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\omega^2, \quad b_1(t) = -\frac{\operatorname{sen} \omega t}{t}, \quad b_2(t) = \omega \frac{\cos \omega t}{t} - \frac{\operatorname{sen} \omega t}{t^2} = -\dot{b}_1(t)$$

e poichè $b_2(t)$ tende a zero per $t \to \infty$ la quantità $|a_2 + b_2(t)|$ si mantiene maggiore di un certo numero positivo da un certo t_0 in poi. Inoltre. sempre con le notazioni del n. 3, per le funzioni

$$c_1(t) = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega t}{t^2}, \quad c_2(t) = -2\omega \frac{\cos \omega t}{t^2} -$$

$$-\omega \frac{\operatorname{sen} \omega t \cos \omega t}{t^2} + 2 \frac{\operatorname{sen} \omega t}{t^3} + \frac{\operatorname{sen}^2 \omega t}{t^3},$$

vale evidentemente la (6).

Poichè l'equazione ridotta

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0$$

ha tutte le soluzioni limitate, insieme con le derivate prime e seconde, della stessa proprietà godranno le soluzioni della (7) in virtù del criterio del n 3.

Per giungere a tale conclusione non è possibile invece servirsi nè del criterio di HUKUHARA che richiede l'assoluta integrabilità

[4] M. HUKUHARA, *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires*, « Journ. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. », Series I, 2 (1934). pp. 13-88; L CESARI, *Un nuovo criterio di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », (2) 9 (1940), pp. 163-186; teor. III.

delle $b_1(t)$ e $b_2(t)$ in ogni intervallo infinito, nè del criterio di CESARI il quale presuppone, che l'equazione algebrica di secondo grado

$$\rho^2(t) - [a_1 + b_1(t)]\rho(t) - [a_2 + b_2(t)] = 0$$

ammetta solo radici con parte reale non positiva, mentre nel caso della (7) tali radici sono date da

$$-\frac{\operatorname{sen}\omega t}{2t} \pm \sqrt{-\omega^2 + \omega\frac{\cos\omega t}{t} + \frac{\operatorname{sen}\omega t}{t^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\omega t}{4t^2}}$$

ed hanno pertanto parte reale che per $t \to \infty$ oscilla intorno allo zero infinite volte.