Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Merli

Una proprietà delle somme parziali della serie di polinomi ortogonali di una funzione continua.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.4, p. 285–287.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_4_285_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Una proprietà delle somme parziali della serie di polinomi ortogonali di una funzione continua.

Nota di LUIGI MERLI (a Firenze).

Sunto. *Sia* $\{P_n(x)\}$ *una successione di polinomi ortogonali e normali relativa al peso* $p(x)$, *con* $p(x)$ *continua e positiva in* (a, b) *finito od infinito, salvo al più un numero finito di punti nei quali può anche annullarsi, e data una funzione* $f(x)$ *continua se ne consideri la relativa serie dei polinomi* $P_n(x)$,

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \qquad a_k = \int_a^b p(x) f(x) P_k(x) dx$$

e poniamo $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$. *Si ha allora che la curva* $y = S_n(x)$, *se non coincide identicamente con la* $f(x)$, *ha almeno* $n+1$ *intersezioni con* $y = f(x)$.

Nei suoi *Appunti di Analisi Superiore*, M. PICONE [1] dimostra un teorema riguardante le somme parziali delle serie di FOURIER di una funzione continua, che può essere facilmente esteso al caso delle serie di polinomi ortogonali di una funzione continua in un intervallo finito od infinito. Il teorema di M. PICONE è il seguente:

Se la funzione reale $f(x)$, *continua nell'intervallo aperto* $0 < x < 2\pi$, *non è un polinomio trigonometrico di ordine* n, *il polinomio di Fourier*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

con

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} kt dt, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ad essa relativo, interseca la funzione stessa, in almeno $2n+1$ *punti interni a* $(0, 2\pi)$, *ed in almeno* $2n+2$ *se, essendo* σ *una certa quantità positiva,* $f(x) - S_n(x)$ *conserva ugual segno nei due intervalli aperti* $0 < x < \sigma$, $2\pi - \sigma < 2\pi$.

Cioè nell'ipotesi dichiarata per la $f(x)$, la somma parziale $S_n(x)$ della serie di FOURIER assume in certi punti interni a $(0, 2\pi)$, il cui

[1] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, 2ª Ed., vol. I, Napoli (1946), pag. 235 e segg.

numero aumenta indefinitamente per $n \to \infty$, esattamente il valore di $f(x)$. In altre parole la $S_n(x)$ è una interpolante della $f(x)$ nell'intervallo $(0, 2\pi)$ e benchè non sia detto affatto che il $\lim_{n \to \infty} S_n(x)$ sia la $f(x)$ stessa, pur tuttavia il teorema fa presumere che la $S_n(x)$, per n sufficientemente grande, si presti in pratica a rappresentare approssimativamente la funzione $f(x)$ in $(0, 2\pi)$.

Ed ecco come può essere esteso il teorema al caso delle serie di polinomi ortogonali di una funzione continua in un intervallo (a, b) finito od infinito.

Sia $p(x)$ una funzione continua definita in (a, b) ed ivi positiva salvo al più un numero finito di punti nei quali può anche annullarsi, ed esistano e siano finiti in (a, b), finito od infinito, i suoi *momenti*

$$\alpha_n = \int_a^b p(x)x^n dx, \qquad \alpha_n \neq 0, \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Si consideri allora la successione dei polinomi $\{\varphi_n(x)\}$, che è possibile costruire in uno ed un solo modo per il teorema di TCHEBYCHEF [2], ortogonale e normale rispetto al *peso* $p(x)$ in (a, b), tale cioè che

$$\int_a^b p(x)\varphi_r(x)\varphi_s(x)dx = \varepsilon_{r,s}, \tag{1}$$

con $\varepsilon_{r,s} = 0$ per $r \neq s$, $\varepsilon_{r,r} = 1$, e si consideri la relativa serie di tali polinomi di una funzione continua $f(x)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \tag{2}$$

dove

$$\{P_k(x)\} = \{\varphi_k(x)/\alpha_k\}$$

e

$$a_k = \int_a^b p(x)f(x)P_k(x)dx.$$

Si ha allora il *teorema:*

Se f(x) *è continua in* (a, b), *la somma parziale* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$, *della* (2), *se non coincide identicamente con la* f(x), *la interseca in in almeno* n + 1 *punti.*

[2] Cfr. G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*. Bologna (1946), pagg 287-289.

Poniamo

$$\Phi(x) = f(x) - [a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \dots + a_n P_n(x)]\,;$$

si tratta di provare che $\Phi(x)$ ha almeno $n+1$ intersezioni con l'asse delle x in (a, b).

Dalle (1) si ha

$$\int_a^b p(x)\Phi(x)dx = 0,$$

e quindi $\Phi(x)$ ha almeno una intersezione con l'asse delle x.

Analogamente, sempre in virtù delle (1), si avrà:

$$\int_a^b p(x)P_r(x)\Phi(x)dx = 0, \qquad \text{per } r = 0, 1, 2, \dots, n-1 \tag{3}$$

e, ragionando per induzione, $\Phi(x)$ avrà almeno n intersezioni con l'asse x in (a, b).

Sempre in virtù delle (1), le (3) si possono scrivere

$$\int_a^b p(x)x^r\,\Phi(x)dx = 0, \qquad r = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ n-1. \tag{3_1}$$

Si tratta quindi di provare che se

$$\int_a^b p(x)x^r\,\Phi(x)dx = 0, \tag{4}$$

la $\Phi(x)$ non può avere n sole intersezioni con l'asse delle x in (a, b), ma dovrà intersecarlo in almeno un altro punto.

Se, per assurdo, indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gli n punti di intersezione di $\Phi(x)$ con l'asse delle ascisse, dovendo valere la (4), tenuto conto delle (3_1), sarà anche

$$\int_a^b p(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)\Phi(x)dx = 0. \tag{5}$$

Ma questa è assurda perchè, annullandosi la $\Phi(x)$ esattamente negli stessi punti in cui si annulla il prodotto $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$, per le ipotesi dichiarate per $p(x)$, si avrà che la funzione integranda

$$p(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)\Phi(x),$$

avrà, salvo al più un numero finito di punti, sempre lo stesso segno in (a, b) e pertanto la (5) è assurda e ne segue il teorema.

Osserviamo che se $f(x) \equiv P_{n+1}(x)$, poichè $S_n(x) \equiv 0$, risulta, ed è ben noto, che $P_{n+1}(x)$ ha $n+1$ zeri distinti.