Bollettino
Unione Matematica Italiana

Enrico Bompiani

Significato del tensore di torsione di una connessione affine.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.4, p. 273–276.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_4_273_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Significato del tensore di torsione di una connessione affine.

Nota di ENRICO BOMPIANI (a Roma)

Sunto. - *Scopo di questa breve Nota è di presentare alcune considerazioni elementari che pongono in evidenza il significato geometrico del tensore di torsione in uno spazio a connessione affine, e qualche conseguenza di tale significato.*

1. Dato lo spazio X_n descritto dal punto x di coordinate x^i, $i = 1, \dots, n$, o $x^{i'} = x^{i'}(x)$, $i' = 1', \dots, n'$, soddisfacenti la condizione $\mathrm{Det.}\, \mathfrak{I}_i^{i'} \neq 0$ ove $\mathfrak{I}_i^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, lo spazio dei vettori $\xi^i = \xi^{i'} \mathfrak{I}^i_{i'}$ spiccati da un punto x è uno spazio centro-affine (il *centro* è il vettore nullo $\xi^i = 0$).

Se è dato un *campo* di vettori $\xi^i = \xi^i(x)$ è notissimo che i differenziali $d\xi^i = \dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^k} dx^k$ *non* sono le componenti di un vettore, ma lo sono le espressioni (differenziali assoluti rispetto alla connessione di componenti L^i_{lh})

$$\bar{d}\xi^i = d\xi^i + L^i_{lh} dx^l \xi^h$$

ove le L^i_{lh} devono soddisfare al sistema di equazioni a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^l \partial x^h} \equiv \mathfrak{I}^{i'}_{lh} = L^i_{lh} \mathfrak{I}_i^{i'} - L^{i'}_{l'h'} \mathfrak{I}_l^{l'} \mathfrak{I}_h^{h'}$$

ove le $L^{i'}_{l'h'}$ sono le componenti della connessione nel sistema di coordinate $x^{i'}$. È pure notissimo che le $L^i_{(lh)} = \frac{1}{2}(L^i_{lh} + L^i_{hl}) = \Gamma^i_{lh}$ sono le componenti della *connessione simmetrica associata* a quella data e le $L^i_{[lh]} = \frac{1}{2}(L^i_{lh} - L^i_{hl}) = S_{lh}^{\cdot\cdot i}$ sono le componenti del *tensore di torsione* della connessione data.

La condizione $\bar{d}\xi^i = 0$, ossia $d\xi^i = -L^i{}_{lh}dx^l\xi^h$ definisce il *trasporto parallelo* (con la connessione data) del vettore ξ^i spiccato dal punto x al punto $x + dx$.

Questo modo abituale di definire la torsione (e che non ne pone in evidenza alcun significato geometrico) sembra far dipendere questa da due punti infinitamente vicini (x e $x + dx$); mentre è chiaro che, trattandosi di un tensore, la sua definizione implica soltanto il punto x.

Si evita questa apparente contraddizione con le considerazioni seguenti.

2. Nello spazio centro-affine dei vettori spiccati da un punto x (fissato a piacere) di X_n si consideri una centro-affininità infinitesima (cioè infinitamente vicina all'identità), necessariamente del tipo

2.1 $$\bar{\xi}^i = \xi^h(\delta_h^i - \varepsilon^i{}_h)$$

ove $\delta_h^i = 0$ per $i \neq h$, $= 1$ per $i = h$ sono i soliti simboli di Kronecker e le $\varepsilon^i{}_h$ sono infinitesimi del 1° ordine (cioè dello stesso ordine dei differenziali dx^i). Il modo più semplice di soddisfare a questa condizione (non l'unico, evidentemente) è di assumere le $\varepsilon^i{}_h$ come forme lineari nei differenziali

2.2 $$\varepsilon^i{}_h = a_{lh}^{\cdot\cdot i}dx^l$$

ove le $a_{lh}^{\cdot\cdot i}$ sono necessariamente le componenti di un tensore. Perciò le

2.3 $$\bar{\xi}^i = \xi^h(\delta^i{}_h - a_{lh}^{\cdot\cdot i}dx^l)$$

rappresentano, per ogni sistema di differenziali dx^l, una centroaffinità infinitesima che muta il vettore ξ^i nel vettore $\bar{\xi}^i$ e fissate le $a_{lh}^{\cdot\cdot i}$ si hanno ∞^n di queste affinità). I vettori uniti ($\bar{\xi}^i = \xi^i = \xi^h\delta^i{}_h$) si hanno per

2.4 $$a_{lh}^{\cdot\cdot i}dx^l\xi^h = 0.$$

Ha un senso geometrico ben determinato la condizione che nella centro-affinità relativa al sistema di differenziali dx^i (e per qualsiasi scelta di questi) siano uniti tutti i vettori aventi la direzione definita dai dx^i; cioè che si abbia identicamente

2.5 $$a_{lh}^{\cdot\cdot i}dx^l dx^h = 0$$

e perciò $a_{(lh)}^{\cdot\cdot i} = 0$ ossia

$$a_{lh}^{\cdot\cdot i} = -a_{hl}^{\cdot\cdot i}.$$

In parole: *Assegnare in un punto della* X_n *un tensore alter-*

nante $a_{lh}^{\cdot\cdot i}$ *equivale a dare in quel punto, e per ogni sistema di differenziali* dx^i *una centro-affinità infinitesima e tale che per essa sono uniti tutti i vettori aventi la direzione definita dai* dx^i.

3. Sia ora dato un *campo* di tensori alternanti, che indicheremo con $S_{lh}^{\cdot\cdot i}(x)$ e una connessione simmetrica di componenti $\Gamma^i_{lh}(x)$. Dato in x il vettore ξ^i e un sistema di differenziali dx^i, applichiamo al vettore ξ^i prima la centro-affinità che lo muta in

$$\bar{\xi}^i = (\delta^i_h - S_{lh}^{\cdot\cdot i} dx^l)\xi^h$$

(sempre relativo al punto x) e al vettore così ottenuto il trasporto parallelo definito da Γ^i_{lh}, passando al vettore (spiccato da $x + dx$)

$$\bar{\xi}^i + d\bar{\xi}^i = (\delta^i_h - S_{lh}^{\cdot\cdot i} dx^l)\xi^h - \Gamma^i_{lh} dx^l \xi^h$$

cioè limitandosi ai termini del 1° ordine (i soli che abbiano senso)

$$\bar{\xi}^i + d\bar{\xi}^i = \xi^i - (S_{lh}^{\cdot\cdot i} + \Gamma^i_{lh}) dx^l \xi^h ;$$

questo è il vettore ottenuto da ξ^i (applicato in x) con spostamento parallelo da x a $x + dx$ rispetto alla connessione $L^i_{lh} = \Gamma^i_{lh} + S_{lh}^{\cdot\cdot i}$. Si ha quindi:

Lo spostamento parallello di un vettore ξ^i *da* x *a* $x + dx$ *secondo la connessione asimmetrica* $L^i_{lh} = \Gamma^i_{lh} + S_{lh}^{\cdot\cdot i}$ *si può ottenere applicando prima (in* x*) a* ξ^i *la centro-affinità definita dal tensore di torsione e dallo spostamento* dx^i*; e poi applicando al vettore così ottenuto il trasporto parallelo da* x *a* $x + dx$ *secondo la connessione simmetrica associata.*

Risulta ben chiaro di qua perchè le autoparallele relative a L^i_{lh} e a Γ^i_{lh} sono le stesse (a causa dei vettori uniti nella centro-affinità).

4. Il significato geometrico del tensore di torsione permette di caratterizzare geometricamente condizioni intrinseche relative ad esso.

Condizioni di questo tipo sono p. es. quelle che si possono imporre alla *traccia* (somma dei termini diagonali) della matrice relativa ad una delle centro-affinità considerate.

Se p. es. si cercano fra le centro-affinità considerate quelle che hanno la stessa traccia dell'identità si ha

$$S_{li}^{\cdot\cdot i} dx^l = 0.$$

Il vettore $S_l = S_{li}^{\cdot\cdot i}$ è stato detto (da Enea Bortolotti) *vettore di Einstein*; la condizione precedente, cioè

4.1 $$S_l dx^l = 0$$

definisce una $(n-1)$ — giacitura in generale (le cui direzioni danno luogo a centro-affinità le cui traccie sono quelle dell'identità).

Questa giacitura viene a mancare (invade la n — giacitura tangente nel punto x) se e solo se $S_l = 0$: e così sono caratterizzati gli spazi a vettore di EINSTEIN nullo.

Supposta soddisfatta la condizione precedente si possono chiedere quelle centro-affinità il cui determinante differisca da 1 per termini d'ordine 2.

Se $S_l = 0$ si ottiene un cono quadrico di direzioni (∞^{n-2}) per il punto x le cui centro-affinità hanno la proprietà voluta. Se invece il vettore di EINSTEIN non è nullo in x si ha nella giacitura di EINSTEIN 4.1 un cono quadrico di direzioni (∞^{n-3}) le cui centro-affinità hanno la proprietà voluta. Più in particolare può accadere che questo cono quadrico svanisca del tutto.

E così si può continuare imponendo a quella differenza di essere di ordine più elevato di 3: tutte le configurazioni così determinate hanno carattere intrinseco.

5. È facile costruire particolari sistemi di centro-affinità infinitesime.

Si consideri p. es. la centro-affinità infinitesima in cui tutte le direzioni sono unite (un vettore è mutato in un altro con la stessa direzione)

$$\bar{\xi}^i = \xi^i(1-\psi) = \delta^i_h \xi^h (1-\psi)$$

con $\psi = \psi_l dx^l$; e poi la centro-affinità infinitesima

$$\bar{\bar{\xi}}^i = \xi^i - \theta dx^i$$

con $\theta = \theta_h \xi^h$. Il prodotto di questo due centro-affinità e l'altra, pure infinitesima,

$$\bar{\bar{\bar{\xi}}}^i = \xi^h \{ \delta^i_h - (\delta^i_h \psi_l - \delta^i_l \psi_h) dx^l \} .$$

Se si aggiunge la condizione che in essa i vettori in direzione dx^i siano uniti si ha necessariamente $\theta_h = -\psi_h$ cioè

$$\bar{\bar{\xi}}^i = \xi^h \{ \delta^i_h - (\delta^i_h \psi_l - \delta^i_l \psi_h) dx^l \} .$$

Il corrispondente tensore di torsione $S_{lh}^{\cdot\cdot i} = \delta^i_h \psi_l - \delta^i_l \psi_h$ caratterizza le connessioni semi-simmetriche di SCHOUTEN.

Questa caratterizzazione è molto più semplice di quella data da J. M. THOMAS [1].

(1) L. P. EISENHART, *Non-riemannian geometry*, (« Am. Math. Soc. », New York, 1927. p. 37).