

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

UMI

## Recensioni

- \* Mario Villa ed., Repertorio di Matematiche, Cedam, Padova, 1951 (Ugo Morin)
- \* F. Schwank, Randwertprobleme und andere Anwendungsgebiete der höheren Analysis für Physiker, Mathematiker und Ingenieure, Teubner, Leipzig, 1951 (Giovanni Sansone)
- \* André Charrueau, Sur des congruences des droites ou de courbes et sur une transformation de contact liée à ces congruences, Gauthier-Villars, 1950 (Corradino Mineo)
- \* D. Hilbert, W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1949 (Ettore Carrucci)
- \* F. Emde, Tafeln elementarer Funktionen - Tables of elementary functions; Jahnke-Emde, Tafeln höherer Funktionen - Tables of higher functions, Teubner, Lipsia, 1948 (Renato Nardini)
- \* W. Lietzmann, Wo steckt der Fehler, Teubner, Leipzig, 1950 (Adriano Barlotti)

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 6*  
(1951), n.3, p. 252-263.

Zanichelli

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1951\\_3\\_6\\_3\\_252\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_3_252_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## RECENSIONI

*Repertorio di Matematiche* a cura di MARIO VILLA, Cedam, Padova, 1951, pag. 730 + XVIII.

Questo *Repertorio*, edito a cura di MARIO VILLA colla collaborazione di molti Matematici italiani, ha pregevoli caratteristiche che lo rendono particolarmente utile ai Giovani che si preparano ai concorsi per le cattedre di Scuola media ed agli Insegnanti di queste scuole, sia giovani che esperti dell'insegnamento.

I Candidati a questi concorsi non solo vi trovano svolti senza eccessiva mole, eppure con chiarezza e buona coordinazione, gli argomenti di tutte le tesi di Matematica, ma anche dei riassunti incisivi dei corsi del primo biennio universitario, trattati con spirito critico e corredati dalle vedute più recenti ed elevate. Questi riassunti sono poi sempre sviluppati non solo per ricordare al lettore le relative nozioni, ma anche come guida alla preparazione per la prova scritta.

Inoltre tutta la trattazione suscita curiosità ed interesse per una più ampia conoscenza. Ed io vorrei qui esortare i Candidati ai concorsi a seguire questo stimolo.

Più ancora che dai Candidati ai concorsi, vorrei che questo *Repertorio* venisse letto dai Professori di Scuola media. E' molto sfavorevole al complesso della cultura matematica italiana che molti nostri laureati, anche tra i migliori, vinto il concorso, si chiudano successivamente nell'ambito ristretto del proprio insegnamento, perdendo il contatto col progresso e col rinnovamento del pensiero matematico. Non è qui il caso di indagare sulle cause economiche e sociali di questo isolamento. Ora questo *Repertorio* fa ripensare in forma più moderna alle principali cose già studiate, arricchisce di nuove nozioni e suscita la meditazione.

\*\*\*

Veniamo ora ad esaminare con maggiori dettagli il contenuto dell'opera. Per comodità di recensione ho ritenuto opportuno di suddividere i 21 Articoli nei seguenti gruppi:

GRUPPO A) — *Fondamenti dell'aritmetica e dell'algebra*:

I) *Elementi della teoria dei numeri*, di GIOVANNI RICCI.

II) *Numeri razionali, reali e complessi*, di PIERO BUZANO.

IV) *Gruppi*, di GUIDO ZAPPA.

V) *Numeri algebrici e numeri trascendenti*, di GIOVANNI RICCI.

L'I è un Articolo veramente pregevole (di 62 pag.) che illustra le vedute classiche e moderne sui fondamenti della teoria dei numeri interi, visti anche

al lume dell'algebra astratta, ed i problemi dell'analisi indeterminata, delle congruenze secondo un modulo e dei resti di potenze.

Il II, come risulta anche dal numero delle sue pagine (26), è forse troppo conciso in relazione all'importanza critica e didattica degli argomenti trattati, quali ad esempio quello dei numeri reali.

Il IV riesce a dare, con mirabile sintesi (32 pag.), una visione completa ed esatta delle questioni principali della teoria dei gruppi astratti fino al teorema di JORDAN-HÖLDER sulle serie di composizione, alle condizioni di risolubilità, allo studio di gruppi particolari e dei gruppi di sostituzioni. Anche la teoria di GALOIS sulle equazioni algebriche è bene accennata, teoria che dà, com'è noto, le condizioni affinché un'equazione algebrica possa essere risolta per radicali o, più in particolare, con successive estrazioni di radici quadrate. Da questa teoria risulta quindi la eventuale possibilità di risolvere un problema geometrico con riga e compasso (Art. X).

Il V consta di 9 pagine preziose sui numeri algebrici e trascendenti, in particolare sulla irrazionalità e trascendenza dei numeri  $\pi$  ed  $e$ .

GRUPPO G) — *Fondamenti della geometria*:

VII) *Postulati della geometria euclidea e non euclidea*, di FABIO CONFORTO.

IX) *I Metodi sintetici per la risoluzione dei problemi di geometria piana*, di LUIGI CAMPEDELLI.

X) *Problemi risolubili con riga e compasso e problemi classici*, di RENATO CALAPSO.

VIII) *Le trasformazioni puntuali*, di MARIO VILLA.

Il VII giustamente valorizza il grado di perfezione a cui HILBERT ed ENRIQUES hanno portato la critica dei postulati rispettivamente della geometria euclidea e non euclidea.

Il IX consta di 12 belle pagine che insegnano non solo ad inquadrare in vari modi la risoluzione di un problema di geometria elementare, ma anche di un problema geometrico-algebrico più elevato.

Il X è una trattazione classica dei problemi classici.

L'VIII, ispirato dal famoso *Programma di Erlangen* di KLEIN, è un modo suggestivo e, nella sua trattazione elementare, originale, di porre i concetti di trasformazione puntuale e di gruppo di trasformazioni puntuali di diverso tipo (proiettive, razionali, birazionali, algebriche, iperalgebriche, ecc.) alla base dello studio di proprietà geometriche. Vengono inoltre considerate le proprietà locali delle trasformazioni (loro approssimazione con trasformazioni quadratiche, ecc.), le trasformazioni conformi, ecc. ed i legami colla geometria elementare dei loro casi metrici particolari.

GRUPPO G) & A) — *Legami tra l'algebra e la geometria elementare*:

XI) *Sulla teoria delle grandezze e dell'equivalenza*, di UGO CASSINA.

XII) *Lunghezze, aree e volumi*, di UGO CASSINA.

XIII) *Applicazioni dell'algebra alla geometria*, di SALVATORE CHERUBINO.

Questi tre articoli, e particolarmente l'ultimo, trattano in modo facile ed esauriente i loro argomenti, tanto importanti per l'insegnamento medio.

GRUPPO R) — *Richiami delle nozioni istituzionali di Analisi e Geometria apprese nei corsi universitari*:

III) *Richiami di Analisi Algebrica*, di VINCENZO AMATO.

IV) *Funzioni, limiti ed algoritmi infiniti*, di GIANFRANCO CIMMINO.

XV) *Richiami di Calcolo differenziale e integrale*, di CESARE RIMINI.

XVI) *Elementi della teoria delle funzioni analitiche*, di GIANFRANCO CIMMINO.

XIV) *Richiami di Geometria analitica e trigonometria*, di MARIO VILLA e AMEDEO AGOSTINI.

XVIII) *Vettori*, di PIERO BUZANO.

XVI) *Le curve e le superficie*, di LUIGI CAMPEDELLI.

Dei pregi e vantaggi di questi richiami ho già parlato all'inizio.

GRUPPO M) — *Matematica applicata*:

XIX) *Calcoli approssimati*, di CESARE RIMINI.

XX) *Probabilità. Matematica Finanziaria e Attuariale*, di FILIPPO SIBIRANI.

Il XIX fa ricordare fra l'altro a tutti gli Insegnanti che i calcoli numerici si dovrebbero fare sempre colla massima economia in relazione al grado di esattezza richiesto o insito nella natura del problema.

Il XX è molto utile per i nostri laureati, che non hanno quasi mai sentito parlare all'Università di Matematica finanziaria ed attuariale e si preparano a concorsi speciali. In 58 pagine trovano esposti i concetti fondamentali di questa disciplina e ricevono una guida sicura al suo approfondimento.

L'Art. XXI: *Cenni di Storia della Matematica*, di AMEDEO AGOSTINI chiude l'opera, corredata anche da un ampio indice analitico.

\* \* \*

Il bel volume, in formato 8° grande, si presenta in veste tipografica perfetta.

Poichè questa sua prima edizione sarà certamente presto esaurita, consiglio fin d'ora la Redazione di non fare una seconda edizione più voluminosa, ma eventualmente di sacrificare in parte qualcuno dei pur ottimi Articoli di Richiami, dando uno sviluppo ancora più ampio ad altri Articoli e continuando ad inserirli nella evoluzione del pensiero matematico.

UGO MORIN

SCHWANK, F. *Randwertprobleme und andere Anwendungsgebiete der hören Analysis für Physiker, Mathematiker und Ingenieure*; VI+406 mit 147 Abbildungen im Text; 1951; B. G. Teubner, Leipzig.

Nella trattatistica dell'ultimo venticinquennio si è sviluppata la tendenza di presentare le teorie matematiche fuse alle più significative applicazioni con lo scopo di rendere familiari ai fisici, agli ingegneri e in generale ai cultori delle scienze applicate le principali teorie dell'Analisi classica e moderna, e il volume di F. SCHWANK ha appunto questo carattere. Esso ha anche valore didattico poichè ai giovani, che nelle scuole di applicazione di ingegneria seguono le Istituzioni di Analisi Superiore, il volume potrà essere consigliato come un'ottima guida per ripensare la materia dei corsi.

Nel Cap. I l'A. tratta delle piccole oscillazioni delle corde e delle sbarre di lunghezza finita e col metodo di BERNOULLI degli sviluppi in serie di soluzioni elementari arriva alla soluzione dei vari problemi soddisfacenti le prescritte condizioni iniziali e ai limiti. Nel caso di corde o di sbarre di lunghezza infinita la soluzione viene rappresentata sotto forma di integrale, giovandosi del metodo di d'ALEMBERT o del metodo di CAUCHY fondato sull'uso dell'integrale di FOURIER.

L'A. mostra poi come gli stessi problemi possano condurre ad equazioni integrali di seconda specie o possano impostarsi col principio di minimo di HAMILTON, di cui tratterà nei Cap. IV e V.

Il Cap. II è un rapido riepilogo delle principali nozioni che si apprendono nei corsi sulla Teoria delle Funzioni di una variabile complessa per quel che riguarda il teorema integrale di CAUCHY, la classificazione dei punti singolari isolati, la rappresentazione conforme.

Il Cap. III, il più importante del volume, dedicato alle equazioni alle derivate parziali della Fisica Matematica, occupa 141 pagine, cioè oltre un terzo del volume.

I teoremi sui potenziali di campo, di doppio strato, logaritmici, sulle funzioni armoniche e biarmoniche, le proprietà delle funzioni sferiche e di BESSEL e delle loro associate sono applicati ai classici problemi dell'idromeccanica piana, del calore, delle onde e a quelli sull'equilibrio e sulle vibrazioni delle aste.

Anche nel Cap. IV è data un'ampia trattazione della teoria delle equazioni integrali lineari di seconda specie col metodo di LIOUVILLE-NEUMANN e col metodo di FREDHOLM. Sono messe in evidenza le proprietà dei nuclei elementari e di quelli simmetrici per i quali sono date le proprietà Hilbertiane di minimo degli autovalori ed è indicato il calcolo del minimo autovalore col procedimento di SCHMIDT-KELLOG e con quello di ENSKOG.

Il teorema di CASTIGLIANO, il principio di FERMAT, il principio di minimo di HAMILTON conducono ai problemi di calcolo delle variazioni del Cap. V.

Le equazioni di EULERO, la condizione necessaria di JACOBI, la sufficiente di LEGENDRE sono dedotte con metodo tradizionale. Chiude il capitolo un cenno

sul metodo di RITZ per il calcolo della curva estremante l'integrale  $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx$

che soddisfa condizioni ai limiti assegnate.

Il Cap. VI è un breve studio delle equazioni alle differenze finite e coefficienti costanti e in Appendice sono richiamati alcuni teoremi di Algebra, di calcolo differenziale ed integrale che si svolgono nei nostri corsi istituzionali di Analisi matematica.

L'A. ha posto in luce nel suo volume i punti essenziali delle singole teorie, e gli ampi riferimenti bibliografici disseminati nel testo, specialmente per quel che riguarda la letteratura matematica tedesca, permettono di approfondire la materia in tutte le direzioni.

GIOVANNI SANSONE

ANDRÉ CHARRUEAU: *Sur des congruences de droites ou de courbes et sur une transformation de contact liée à ces congruences*, Mémorial des Sciences Mathématiques, Paris, Gauthier - Villars, 1950, pp. 69.

In questo scritto l'A. espone un insieme di risultati, alcuni già apparsi in precedenti Note, nel campo delle congruenze di raggi o di curve.

Egli si fonda su classici teoremi del RIBACOUR e del RICHARD, magistralmente esposti, qualcheduno anche generalizzato, dal DARBOUX, che li ricollega all'arduo problema della deformazione infinitesima delle superficie (vol. IV della *Théorie générale des surfaces*).

Sia  $s$  una superficie qualunque (non sviluppabile),  $a$  un suo punto generico,  $w$  il piano tangente in  $a$ ,  $\vec{n}$  un vettore unitario normale a  $w$ . Si consideri un punto qualunque  $O_1$  dello spazio e un vettore qualunque  $\vec{T}_1$ . Sia  $M_1$  l'estremo

del vettore

$$\vec{O_1 M_1} = \vec{T_1} \wedge \vec{O_1 a}.$$

Dal punto  $M_1$  si conduca la retta  $D_1$  parallela a  $\vec{n}$ . Quando il punto  $a$  descrive la superficie  $s$ , la retta  $D_1$  genera una congruenza  $C_1$  (dedotta da  $s$  con la costruzione del GUICHARD relativa al punto  $O_1$  e al vettore  $\vec{T_1}$ ). Come è ben noto, la superficie media di  $C_1$  è un piano: precisamente il piano passante per  $O_1$  e normale a  $\vec{T_1}$ . Questo piano e la superficie  $s$  si corrispondono inoltre con ortogonalità degli elementi lineari e quindi (RIBACOUR) alle sviluppabili di  $C_1$  corrispondono le asintotiche di  $s$ ; il che val quanto dire che i due piani focali di  $C_1$  passanti per la generatrice  $D_1$  sono normali alle due tangenti asintotiche corrispondenti di  $s$ .

Preso un altro punto arbitrario  $O_2$  e un altro vettore libero  $\vec{T_2}$ , si costruisca similmente il punto  $M_2$  estremo del vettore

$$\vec{O_2 M_2} = \vec{T_2} \wedge \vec{O_2 a};$$

e poi per il punto  $M_2$  si conduca la retta  $D_2$  parallela a  $\vec{n}$ . Quando  $a$  descrive  $s$ , la  $D_2$  genera una congruenza  $C_2$ .

La coppia di congruenze  $C_1$  e  $C_2$  forma l'oggetto precipuo dello studio dello CHARRUEAU. (Ognuna di queste congruenze può esser facilmente studiata per mezzo della 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> forma fondamentale del KUMMER rispetto ai due parametri che individuano il punto  $a$  di  $s$ : naturalmente  $C_1$  e  $C_2$  hanno la stessa 1<sup>a</sup> forma fondamentale).

Il risultato essenziale di questo studio è dovuto, per l'A., al fatto che in questa teoria s'incontra una notevolissima trasformazione di contatto, determinata dai punti  $O_1$  e  $O_2$  e dai vettori liberi  $\vec{T_1}$  e  $\vec{T_2}$ , della quale diremo presto. Aggiungiamo che l'A. fa anche intervenire un sistema di vettori costituito da una coppia di momento  $\vec{O_1 O_2}$  e dai due vettori equipollenti a  $-\vec{T_1}$  e  $\vec{T_2}$ , i cui sostegni contengono rispettivamente i punti  $O_1$  e  $O_2$ .

Questo sistema di vettori ha importanza in quanto, in relazione a esso, le equazioni della trasformazione possono, senza diminuzione di generalità, essere ridotte e dar luogo a interessanti interpretazioni geometriche e cinematiche.

E veniamo alla trasformazione di contatto. Poichè le sviluppabili di  $C_1$  e di  $C_2$  si corrispondono (in quanto tutt'e due corrispondenti alle asintotiche di  $s$ ), esse godono (GUICHARD) delle seguenti proprietà: 1°) i piani focali di  $C_1$  son paralleli a quelli di  $C_2$ ; 2°) detti  $F_1$  e  $G_1$  i punti focali su  $D_1$  e  $F_2$ ,  $G_2$  i corrispondenti su  $D_2$ , le due rette  $F_1 F_2$ ,  $G_1 G_2$ , il piano delle quali chiamiamo  $\Pi$ , s'incontrano in un punto  $A$ , il luogo del quale, al variare del punto  $a$  di  $s$ , è una superficie  $S$ , invilupata dal piano  $\Pi$  stesso; le due rette  $F_1 F_2$  e  $G_1 G_2$  son tangenti coniugate su  $S$  e le curve coniugate da esse inviluppate su  $S$  corrispondono alle due famiglie di sviluppabili di  $C_1$  e  $C_2$ . Ne viene che i due elementi  $(a, \omega)$  e  $(A, \Pi)$  di  $s$  e di  $S$  son legati da una trasformazione di contatto, che lo CHARRUEAU designa con  $\tau (O_1, O_2, \vec{T_1}, \vec{T_2})$  o semplicemente con  $\tau$ . Le proprietà di  $\tau$  e della sua inversa  $\tau^{-1}$ , con opportune riduzioni, sono abilmente dimostrate e con notevole semplicità. L'A. dimostra che partendo dall'elemento di contatto  $(A, \Pi)$ , la  $\tau^{-1}$ , tralasciando casi degeneri, dà, oltre l'elemento di contatto  $(a, \omega)$ , un secondo elemento di contatto  $(a', \omega')$ ; cioè, partendo da  $S$ , dà  $s$  e in generale una seconda superficie  $s'$ . La retta  $aa'$  è normale al piano  $\Pi$ ; le superficie  $s$  e  $s'$  costituiscono le due falde della superficie focale della congruenza generata da  $aa'$  quando  $a$  descrive  $s$ :  $\omega$  e  $\omega'$  sono i piani focali di  $aa'$ . Altre proprietà assai

notevoli di  $\tau^{-1}$  l'A. dimostra dopo aver costruito un certo piano  $s_1$  in corrispondenza con  $s$  con ortogonalità degli elementi lineari. Egli considera inoltre le sei coppie di superficie che si corrispondono con ortogonalità degli elementi lineari, una coppia delle quali è la stessa  $(s, s_1)$ , e dimostra una proprietà relativa a una certa superficie  $\Sigma$  della teoria: la superficie  $\Sigma$  relativa a  $(s, s_1)$  è la superficie  $s'$ , e così la superficie  $\Sigma$  relativa a  $(s', s_1)$  è  $s$ . (Per la teoria delle dodici superficie, si veda DARBOUX, capitoli III e IV del vol. IV, citato, e anche CHARRUEAU, *Sur la déformation infiniment petite des surfaces*, « Bul. Sc. math. », 2<sup>e</sup> séries, t. 69, p. 92 à p. 108).

Ma è impossibile, per ragioni di spazio, seguire l'A. in tutti i particolari delle numerose proprietà di  $\tau$  e di  $\tau^{-1}$ .

Tutta questa parte è esposta dall'A. nei capitoli I, II, III e IV del suo lavoro, da p. 1 a p. 37. Il successivo capitolo V (da p. 37 a p. 40) tratta delle congruenze di rette e di curve che si hanno quando si suppongano invariate l'origine  $O$  e la superficie  $s$  e dipendenti da uno stesso parametro:  $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{OO}_1, \vec{OO}_2$ .

Col capitolo V si chiude la parte I del lavoro. La parte II tratta del caso particolare in cui  $O_1$  e  $O_2$  coincidono e quindi il sistema predetto di vettori si riduce a un unico vettore (da p. 41 a p. 55). In fine la parte III tratta il caso del sistema riducibile a un sol vettore, ma con  $O_1$  e  $O_2$  distinti (da p. 56 a p. 69).

L'A. si ferma al caso di una  $s$  qualunque (non sviluppabile). Ma casi particolari sono notevoli: per es. quello in cui  $s$  è una superficie minima: l'essere la  $s$  minima è condizione necessaria e sufficiente (come mostran subito le forme di KUMMER) affinché le congruenze  $C_1$  e  $C_2$  siano normali, con tutte le conseguenze che da ciò derivano.

CORRADINO MINIO

D. HILBERT, W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*, dritte, verbesserte auflage, Springer - Verlag, Berlin Gottingen Heidelberg, 1919, pp. VIII+156.

È apparsa nella sua terza edizione aggiornata, un'opera fondamentale per lo studioso di logica simbolica. Lo scritto in esame ci fornisce una rapida ed efficace sintesi del pensiero logico di Hilbert e degli ulteriori sviluppi che ne derivano, con il pregio non comune di partire da considerazioni estremamente semplici per salire gradatamente all'esame delle questioni più sottili e più vive della logica contemporanea, specialmente per quanto concerne le basi della matematica.

Dopo una breve introduzione dedicata al significato, ai fini ed alla storia della logica simbolica (nell'edizione del 1928 vi era anche una succinta e selezionata bibliografia alle pp. 115-118), nel capitolo I si entra nel vivo dell'argomento con l'esposizione del calcolo delle proposizioni, nel campo del quale non viene analizzata la struttura delle proposizioni fondamentali.

Vengono definite (§ 1) le operazioni che conducono alla contraddittoria di una proposizione, alla congiunzione, alla disgiunzione, all'implicazione rispetto a due proposizioni, (mentre i termini di somma e prodotto logico, usati nella prima edizione vengono evitati nelle edizioni successive, dato che detti termini sono stati adoperati con significato diverso dai diversi logici)

Delle dette operazioni vengono dimostrate (§ 2) le proprietà fondamentali, le quali permettono (§ 3) di porre sotto una forma particolarmente semplice ed espressiva, chiamata forma normale congiuntiva, una qualsiasi combinazione

di proposizioni. L'uso di detta forma normale (§ 4) permette di risolvere l'importante problema di trovare quelle combinazioni di proposizioni fondamentali che sono sempre vere, indipendentemente dalla verità o dalla falsità delle proposizioni fondamentali stesse.

In quest'ordine d'idee si dimostra (§ 5) un'interessante legge di dualità logica.

Una seconda forma normale delle espressioni logiche, detta disgiuntiva, permette (§ 6) di risolvere il problema di trovare le combinazioni sempre false di proposizioni.

Dopo alcune considerazioni sulle diverse combinazioni di proposizioni che si possono ottenere a partire da proposizioni fondamentali date (§ 7), e sui problemi della validità generale e dell'adempibilità (§ 8), s'indica il modo (§ 9) di costruire un quadro sistematico di tutte le conseguenze di dati postulati esprimibili mediante il simbolismo del calcolo delle proposizioni, e si risolve l'importante problema di stabilire se una data proposizione è una conseguenza di dati postulati, sempre, s'intende, nel campo di applicabilità del calcolo delle proposizioni.

Vengono indicati (§ 10) quattro assiomi e due regole per dedurre (regola di sostituzione e schema di deduzione) mediante i quali è possibile dar forma assiomatica al calcolo delle proposizioni, e vengono forniti esempi (§ 11) di deduzioni di formule logiche con detti metodi.

Un'interessante dimostrazione della non contraddittorietà del sistema indicato d'assiomi alla base del calcolo delle proposizioni di Hilbert (§ 12) viene ottenuta mediante un'interpretazione aritmetica del sistema stesso, presuppone quindi la non-contraddittorietà dell'aritmetica (non è quindi in contrasto con il noto teorema del Gödel).

Si dimostrano infine (§ 13) l'indipendenza e la completezza intesa in due diversi modi, del sistema considerato.

Con i metodi indicati si risolvono, come si è visto, i principali problemi che si presentano alla nostra mente quando le proposizioni fondamentali vengono assunte come elementi indivisibili. Ci si accorge però che in tale ordine d'idee non sarebbe possibile trattare le questioni della logica classica, p. es. la teoria del sillogismo, in cui compaiono essenzialmente gli elementi (soggetto e predicato) di cui la proposizione è costituita. Nel capitolo II mediante opportune nuove interpretazioni del calcolo delle proposizioni (§ 1 e § 2) i nostri Autori riescono a dedurre sistematicamente (§ 3) le regole della conversione e quelle forme di sillogismo della logica tradizionale, valide senza supplementari ipotesi esistenziali. Cioè secondo Aristotele la proposizione « Tutti gli  $A$  sono  $B$  » è valida soltanto quando esiste qualche oggetto che è  $A$ . Invece nella trattazione moderna che stiamo considerando, la proposizione in questione non esclude che la classe degli  $A$  sia vuota. Se ne deduce che alcune forme di sillogismo della logica classica non sono valide nella logica dei nostri Autori.

Al principio del III capitolo dedicato al calcolo dei predicati ristretto, i nostri Autori osservano (§ 1) che non tutte le relazioni logiche sono esprimibili nel campo della logica tradizionale, ed in particolare, il formalismo aristotelico non è sufficiente per la trattazione dei fondamenti logici della matematica.

Viene pertanto introdotto (§ 2) un nuovo simbolismo basato sulla rappresentazione del predicato mediante il segno di funzione, dove nel posto vuoto destinato alla variabile indipendente si pone il soggetto. Analogamente si esprimono le relazioni fra due o più oggetti, con il segno di funzione di due o più variabili. Viene introdotto inoltre un apposito segno detto della *totalità*, il quale indica che una certa relazione  $A(x)$  vale per tutti gli  $x$ :  $(x)A(x)$ ; e parimenti

compare un altro segno che indica l'esistenza di un  $x$  che soddisfa una certa relazione:  $(Ex)A(x)$ .

Esempi di applicazioni relative alle basi dell'aritmetica, a questioni sulla convergenza etc. (§ 3), illustrano il calcolo dei predicati di cui viene opportunamente precisato il simbolismo indicando come viene costruita una formula di detto calcolo (§ 4), e vengono formulati (§ 5) gli assiomi fondamentali e le regole per dedurre. In quest'ultima edizione si nota un perfezionamento della espressione della regola di sostituzione per i predicati variabili. Dopo alcune interessanti applicazioni e sviluppi del calcolo dei predicati (§ 6, § 7, § 8), vengono affrontati (§ 9), i problemi della non-contradittorietà e dell'indipendenza degli assiomi del calcolo stesso, mediante il procedimento dell'interpretazione aritmetica, già usato nel calcolo delle proposizioni.

Si giunge per tale via a dimostrare la non-contradittorietà degli assiomi considerati, ma, come osservano i nostri Autori, non deve essere sopravvalutato il significato di detta dimostrazione, in quanto questa è stata ottenuta con riferimento ad un campo d'individui in numero finito. Rimane perciò impregiudicata la questione della coerenza delle basi della matematica, in cui si considerano insieme d'infiniti elementi. Per un esame approfondito del problema della coerenza delle basi della matematica i nostri Autori rinviavano all'opera: D. HILBERT u. P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, Berlin I, Bd. 1934, II Bd. 1939. Successivamente viene dimostrata l'indipendenza degli assiomi predetti.

Si considera quindi (§ 10) il problema della completezza del sistema di assiomi considerato. Un sistema si dice completo in senso stretto quando l'aggiunta agli assiomi di una formula non dimostrabile genera sempre una contraddizione; si dice invece completo in senso lato quando dal sistema considerato si possono dedurre tutte le formule identiche cioè sempre vere per qualsiasi valore attribuito alle variabili. Per il sistema di postulati alla base del calcolo delle proposizioni, è stata dimostrata la completezza nei due sensi; invece nel caso del calcolo dei predicati non vale la completezza in senso ristretto, ma quella in senso lato, secondo un risultato del Gödel del 1930.

Aggiungendo agli assiomi logici ed alle regole per dedurre i postulati propri di una determinata teoria si ottiene un particolare sistema, nell'ambito del quale è dimostrabile un insieme di teoremi. Alcuni esempi di dimostrazioni condotte secondo il procedimento predetto (§ 11) vengono forniti nel campo dei sillogismi, della geometria, delle proprietà delle disuguaglianze.

Vengono esaminate interessanti questioni relative alla deducibilità ed alla dipendenza logica di un teorema da un sistema di assiomi.

Viene quindi posto in rilievo (§ 12) l'*Entscheidungsproblem* o problema della decisione per formule prive di segni individuali, il quale problema consta a sua volta dei due problemi, strettamente legati fra loro, della validità generale (*Allgemeingültigkeit*) e dell'adempibilità (*Erfüllbarkeit*). Il primo di questi due problemi consiste nel riconoscere se una formula è identica, cioè sempre valida, in un determinato campo di variabilità; mentre il secondo problema consiste nel riconoscere se una formula è suscettibile di divenire valida per una opportuna scelta, in un determinato campo, delle variabili che vi compaiono. Sul problema della decisione che viene considerato dai nostri Autori il problema fondamentale della logica matematica ed è stato, come si è visto, risolto completamente nel campo del calcolo delle proposizioni, vengono riferiti importanti risultati. Si conclude tuttavia che dopo le ricerche sull'argomento di A. Church, A. M. Turing, K. Gödel, è vano sperare in una risoluzione generale del problema.

Il capitolo IV è dedicato al calcolo dei predicati generalizzato. Si osserva (§ 1)

che per esprimere taluni enunciati logici o matematici occorre far comparire nelle formule proposizioni e predicati variabili ed applicare ad essi i segni della totalità e dell'esistenza: si pensi ad esempio al principio d'induzione completa.

Si giunge così al calcolo dei predicati di secondo grado, per il quale, come già per quello di primo, studiato nel capitolo precedente, si pone la questione di stabilire se si può dare una sistema di formule fondamentali dalle quali si possano ricavare tutte le formule identiche mediante passaggi eseguiti secondo regole date. I nostri Autori osservano a questo proposito che un tale sistema non esiste, e citano un importante risultato del Gödel (1931): per ogni sistema fondamentale e determinate regole per dedurre, si possono dare formule identiche le quali non si possono dedurre.

Viene preso in esame il problema della decisione nel calcolo dei predicati di secondo grado, ma di tale problema non si può sperare di trovare una soluzione di carattere generale, in quanto contiene in sé il problema della decisione di primo grado.

Alla definizione logica del concetto di numero viene applicato (§ 2) il calcolo dei predicati generalizzato il quale (§ 3) ammette non soltanto un'interpretazione puramente logica, ma anche un'interpretazione secondo la teoria degli insiemi, che viene quindi sistemata mediante il simbolismo considerato.

Una formula (§ 4) che contiene una variabile individuale, può essere considerata come un predicato variabile il quale a sua volta può essere sostituito in un'altra espressione che diverrà un predicato di predicato, e così via ad arbitrio. Si possono considerare come oggetti del pensiero, oltre quelli dell'originario campo di individui, anche i predicati, i predicati di predicati etc. Si presenta ora la questione di stabilire se questi oggetti in senso lato, possono considerarsi come appartenenti ad un unico campo d'individui. I paradossi della logica (§ 4) mostrano che tale procedimento non è lecito. Vengono esaminati e tradotti in simboli alcuni dei più noti paradossi logici.

Si afferma chiaramente (contro l'opinione di alcuni neo-empiristi) che non possiamo in alcun modo rassegnarci all'esistenza di affermazioni contraddittorie in uno stesso sistema, la quale esistenza renderebbe l'intero calcolo *bedeutungslos* (privo di significato). I paradossi presi in esame vengono ripartiti in due classi: paradossi logici propriamente detti, di cui l'antinomia di B. Russell costituisce un tipico esempio, e paradossi semantici (o sintattici) come quelli del mentitore e di Richard.

Per quanto concerne i paradossi logici propriamente detti, si riscontra la loro radice nell'uso di un concetto indistinto di predicato; mentre per i paradossi semantici si dichiara che essi non infirmano la validità del calcolo costruito.

Per superare i paradossi logici si costruisce (§ 5) il calcolo dei gradi, ispirato all'opera di Whitehead e Russell: *Principia Mathematica*.

Più precisamente vengono chiamati *predicati di primo grado* i predicati individuali, che si riferiscono cioè ad individui, ripartiti a loro volta in diversi generi a seconda del numero dei loro argomenti. Per *predicati di secondo grado* si intendono quelli, gli argomenti dei quali sono individui o predicati di primo grado, fra i quali argomenti esiste almeno un predicato. Anche i predicati di secondo grado vengono ripartiti secondo il numero e la qualità dei loro argomenti. Analogamente si definiscono i predicati di grado superiore.

La regola di sostituzione viene quindi formulata in modo che al posto di un predicato variabile che compaia come argomento in una formula, si possa soltanto sostituire un predicato, il tipo del quale sia uguale a quello della

variabile, (cioè il grado degli argomenti sia sempre minore del grado del predicato cui si riferiscono).

Per superare i paradossi semantici è stata costruita da Whitehead e Russell una teoria dei tipi ramificata nella quale i predicati di un certo grado vengono ripartiti ulteriormente, a seconda del modo con il quale sono stati definiti, con riferimento ai segni della totalità e dell'esistenza usati nella formula considerata. Le difficoltà presentate dalla teoria dei tipi ramificata per quanto concerne la costruzione della teoria degli insiemi e i fondamenti dell'analisi, e l'introduzione dell'assioma della riducibilità, sono state efficacemente esposte nella prima edizione dell'opera in esame. Nelle edizioni successive la teoria dei tipi ramificata viene considerata superflua e non viene più sviluppata, tanto più che è stata dimostrata la non-contradittorietà del semplice calcolo dei gradi; a questo proposito si citano i lavori di A. Tarski e di G. Gentzen.

Il calcolo così costruito viene applicato (§ 6) alla sistemazione della teoria dei numeri reali secondo Dedekind, ed alla dimostrazione dell'esistenza dell'estremo superiore di un insieme limitato di numeri reali. Con un rapido cenno (§ 7) (corredato da indicazioni bibliografiche) alle ricerche di A. Church, W. A. Quine, L. Chwistek e W. Hetper, dirette a superare le antinomie logiche pur abolendo la teoria dei gradi o trasformandola notevolmente, termina l'opera in esame, ricca di significato e d'interesse non soltanto per il matematico ma anche per il filosofo che miri a rendersi conto dell'intima struttura logica delle teorie razionali.

ETTORE CARRUCCI

F. EMDE: *Tafeln elementarer Funktionen*. - *Tables of elementary functions*. JAHNKE-EMDE: *Tafeln höherer Funktionen*. - *Tables of higher functions* (rielaborato da F. EMDE). Teubner Verlagsgesellschaft, Lipsia, 1948.

Questa ben nota opera, preziosa per tutti quanti si occupano di calcoli numerici, va sempre più ampliandosi attraverso le sue successive edizioni (1). Essendo inutile ripetere, sui pregi dell'opera e sulla genialità delle figure, giudizi già autorevolmente espressi, ci limiteremo qui a elencare quali cambiamenti in quest'ultima edizione presenti la seconda parte rispetto all'edizione del 1938 (2) (la prima parte è pressochè invariata nei confronti dell'edizione del 1940 (3)).

Nel cap. III è stata estesa la tabella dell'integrale degli errori mentre è stata soppressa la parte riguardante le derivate di tale integrale; sono state introdotte invece tabelle sulle funzioni  $\varphi_n(x)$  di Hermite per  $n = 0, 1, \dots, 11$ ; è stata aggiunta una tabella sulle funzioni  $l_n(x)$  di Laguerre per  $n = 1, 2, \dots, 10$  calcolate da F. TRICOMI.

Nel cap. VII è stata introdotta una tabella sulle funzioni  $Q_n(x)$  di Legendre di 2ª specie per  $n = 0, 1, \dots, 7$ .

Il cap. VIII è stato arricchito mediante formule e illustrazioni grafiche per

(1) Dalla seconda edizione a volume unico del 1933 (se ne veda la recensione in questo Boll. S. I, Vol. XIII, 1934) si è passati ai due volumi attuali nel 1938-40.

(2) Si veda questo Boll. S. II, Vol. I, 1939.

(3) Si veda questo Boll. S. II, Vol. IV, 1943.

l'uso delle serie inizialmente convergenti di Debye per le funzioni di Bessel di argomento e ordine complesso e mediante tabelle sulle funzioni incomplete di Anger e Weber e sulle funzioni di Bessel  $J_n(iy)$  e  $H_n^{(1)}(iy)$  con  $n = 1, 2$ , queste ultime in sostituzione delle precedenti tabelle (inesatte) sulle funzioni  $I_n(iy)$  e  $J_{-\frac{n}{3}}(iy)$ .

Si tratta quindi di innovazioni lodevoli che aumentano l'utilità dell'opera nei riguardi della scienza applicata.

RENATO NARDINI

W. LIETZMANN: *Wo steckt der Fehler?* pp. 184. Teubner, Leipzig 1950.

Il volume si presenta come una interessante raccolta di errori e sofismi relativi ai vari campi della matematica e vuole essere non una semplice collezione di curiosità, ma anche e soprattutto un efficace ausilio didattico per gli insegnanti di matematica.

Già nel 1913 l'A. aveva pubblicato (con la collaborazione di V. Trier) nella « Mathematisch - Physikalische Bibliothek » un volumetto avente lo stesso titolo, del quale sono apparse, successivamente, numerose edizioni. La materia di esso, rielaborata ed ampliata, costituisce soltanto una delle tre parti che compongono l'opera attuale: la prima. In questa si tratta di errori di apprezzamento dei sensi e di altri errori, dei quali si garantisce l'autenticità, riscontrati in compiti di scolari, ed anche in scritti di autori ormai lontani dai banchi della scuola. Se ne trovano qui di veramente singolari ed è un vero peccato che la comprensibile riservatezza dell'autore non consenta di appagare la curiosità di conoscere le fonti di alcune delle più strabilianti uscite. Così, per esempio, il lettore desidererebbe proprio sapere quale è quel libro scolastico nel quale si legge: « Mentre l'equazione  $x^2 + y^2 = 0$  rappresenta un punto *rotondo*, è invece impossibile rappresentare un punto *quadrato* ».

La seconda parte — il cui contenuto coincide con quello di un altro volumetto dell'autore intitolato « Trugschlüsse » — è dedicata invece a errori volutamente commessi e nascosti nelle pieghe del ragionamento, talvolta con tale abilità che il lettore inesperto, restando interdetto di fronte ad un risultato assurdo, può faticare assai prima di scoprirne la causa.

Il volume termina con un'ampia raccolta di paradossi tolti dai vari campi dell'analisi algebrica e infinitesimale. Qui — a differenza di quanto avviene nelle prime due parti — è anche, in breve, indicato dove si debba ricercare l'errore.

ADRIANO BARLOTTI

## LIBRI RICEVUTI

- BRASCA L., GEROSA G. - *Nuovo Prontuario per Calcoli Aritmetici, Trigonometrici, Finanziari e Attuariali*, pagg. 302, C. Signorelli, Milano, 1950.
- TRICOMI F. - *Lezioni di Analisi Matematica*, 1<sup>a</sup> p., pagg. 334. Padova, Cedam, 1948.
- TRICOMI F. - *Esercizi e Complementi di Analisi Matematica*, 1<sup>a</sup> p., pagg. 376, Padova, Cedam, 1949.
- BIEBERBACH L. - *Einführung in die Analytische Geometrie*, pagg. 168. Verlag für Wissenschaft und Fachbuch, G.m.b.H., Bielefeld, 1950.
- ENGEL G. - *Analytische Geometrie*, pagg. VII + 240, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1950.
- ENZYKLOPÄDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN - *Algebra und Zahlentheorie*, pagg. 48. G. B. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.
- HAPPACH V. - *Ausgleichrechnung*, pagg. 104. B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.
- HASSE H. - *Höhere Algebra*. I: Lineare Gleichungen, pagg. 152; II: Gleichungen höheren Grades, pagg. 160. *Sammlung Götschen*, Bd. 931-932. Walter de Gruyter & Co., 1951.
- MAAK W. - *Differential- und Integralrechnung*, pagg. 235. Wolfenbütteler Verlagsgesellschaft G.m.b.H., Wolfenbüttel, 1949.
- NEYMAN J. - *First Course in Probability and Statistics*, pagg. 350. Henry Holt and Company, New York, 1950.
- OSTROWSKI A. - *Vorlesungen über differential - und Integralrechnung* - Zweiter Band, pagg. 482. Verlag Birkhäuser, Basel, 1951.
- PERRON O. - *Algebra*. I: Die Grundlagen, pagg. 301; II: Theorie der Algebraischen Gleichungen, pagg. 260. *Götschen Lehrbucherei*, Bd. 8-9. Walter de Gruyter & Co., 1951.
- PICKERT G. - *Einführung in die höhere Algebra*, pagg. 300. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1951.
-