Alpinolo Natucci

Osservazioni sul problema di Fermat.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.3, p. 245–248.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_3_245_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Osservazioni sul problema di Fermat.

Nota di ALPINOLO NATUCCI (a Genova).

Sunto. - *In relazione al problema di* FERMAT, *si studia la funzione* $z^n - (x^n + y^n)$ *e si conclude che è estremamente improbabile che essa si annulli per* x, y, z, n *interi ed* $n \gtreqless 3$.

1. È ben noto come PIETRO FERMAT (1601-1665) ha asserito di aver trovato una dimostrazione « ammirevole » della impossibilità di risolvere in numeri interi l'equazione:

$$x^n + y^n = z^n, \tag{I}$$

per $n > 2$, e che tale dimostrazione non poteva essere contenuta nel margine dell'opera di DIOFANTO, che egli postillava. Per quante ricerche siano state fatte nei manoscritti che egli ha lasciato, pubblicati poi nelle opere complete (Paris, 1891, 1894, 1896, 1912, 1922), tale dimostrazione non è stata trovata. In una lettera al suo amico CARCAVI egli ha accennato al principio del metodo che egli chiamava della *discesa infinita*, e che gli ha servito a dimostrare molti difficili teoremi della teoria dei numeri. In seguito a queste indicazioni, il suo amico FRENICLE DE BESSY ha dimostrato la irrisolubilità della (I) per $n = 4$: *Traité des triangles rectangles en nombres*, 1676.

È noto come si siano occupati dell'equazione (I) molti celebri matematici, riuscendo a dimostrarne la irrisolubilità per alcuni valori di n ma non in generale, ricorderemo fra gli altri KUMMER e SOFIA GERMAIN. Rifare quì la storia del problema sarebbe cosa troppo lunga; però non sarà forse inutile dare una piccola bibliografia, necessariamente incompleta, per soddisfare la curiosità del lettore.

P. BACHMANN, *Das Fermatsproblem in seiner bisherigen Entwickelung*, Berlin, 1919.

L. I. MORDEL, *Three Lectures on Fermat's Last Theorem*. Cambridge University Pres, 1921; trad. francese di A. SALLIN, Les presses Universitaires de France.

L. E. DICKSON, *History of Theory of Numbers* (in 3 volumi) Institution Carnegie, Washington, 1923, vol. I°.

M. CIPOLLA *Storia della Teoria dei numeri o aritmetica superiore in Enciclopedia italiana*, vol. IV°, pag. 370-378.

M. CIPOLLA, *Teoria dei numeri - Analisi indeterminata*, in Enciclopedia delle Matematiche elementari, Vol. I°, parte Iª, Milano, U. Hoepli ed. 1930.

R. NOGUÈS, *Théorème de Fermat. Son Histoire*. Un vol. di pag. 177. Paris, Librairie Vuibert, 1932.

T. GOT, *Une énigme mathématique*: Le dernier théorème de FERMAT in: Les grands courants de la pensée mathématique, presentés par F. LE LIONNAIS. Cahiers du sud, Marseille, 1948.

E. CALLANDREAU, *Célebrès problèmes mathématiques*, 12. Le dernier théorème de FERMAT. Editions Albin Michel, Paris, 1949 (1).

(1) Vedere per altre informazioni: G. RICCI, *Elementi di Teoria dei Numeri*, in « Repertorio di Matematiche » a cura di M. VILLA, Padova, Cedam, 1951, pp. 58-61.

Consideriamo la funzione:

$$z^n - (x^n + y^n) \tag{II}$$

per ricercare se sia possibile annullarla per valori interi di n e delle variabili. Si trova così che la funzione stessa prende valori non troppo discordi da zero per piccoli valori di n, e per valori di x, y, z, che differiscano fra di loro per qualche unità. Col crescere di n o per valori delle variabili molto discosti fra loro, la funzione stessa prende valori che si discostano molto da zero. Si acquista così, se non la certezza logica, una ragionevole presunzione che l'asserto di FERMAT sia vero.

Credo opportuno sottoporre al giudizio altrui queste mie semplici osservazioni con la speranza che qualcuno, più esperto di me, possa arrivare a risultati soddisfacenti.

2. Si consideri, dunque, l'espressione (II), dove si suppone $n \geqq 3$, intero, e $0 < x < y < z$. Poniamo:

$$y = x + u , \qquad z = y + v = x + u + v . \quad (u > 0 , \ v > 0),$$

$$\begin{aligned} F_n(x;\ u,\ v) &= z^n - (x^n + y^n) = (x + u + v)^n - x^n - (x + u)^n = \\ &= (x + u)^n + \binom{n}{1}(x + u)^{n-1}.\ v + \binom{n}{2}(x + u)^{n-2}.\ v^2 + \ldots + \\ &+ v^n - x^n - (x + u)^n = -x^n + nvx^{n-1} + c_2(u,\ v)x^{n-2} + \\ &+ c_3(u,\ v)x^{n-3} + \ldots + c_n(u,\ v), \end{aligned} \tag{III}$$

dove $c_i\ (u,\ v)$ sono polinomi in u, v a coefficienti interi e positivi e pertanto $c_i\ (u,\ v) > 0$.

Teniamo fissi x, u, v; allora per $n \to +\infty$ è, per note proprietà,

$$F_n(x;\ u,\ v) \to -\infty .$$

Inoltre $F_n(0;\ u,\ v) = c_n(u,\ v) > 0$, onde la funzione continua $F_n(x)$ si annulla almeno una volta per x positivo, e poichè i coefficienti sono tutti positivi ad eccezione del primo, per la regola di CARTESIO, si ha un'unica radice positiva.

Sulla derivata:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -nx^{n-1} + n(n-1)vx^{n-2} + (n-2)c_2(u,\ v)x^{n-3} + \ldots + c_{n-1}(u,\ v),$$

si possono ripetere considerazioni analoghe, e queste portano a concludere che essa si annulla per un solo valore x_0 della x, che dal segno di $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ risulta essere un massimo. Pertanto la funzione

(III) per $x > 0$ ha un solo massimo relativo (che è anche massimo assoluto); essa è crescente in $(0, x_0)$ e decrescente in $(x_0, +\infty)$.

Il problema di FERMAT consiste pertanto nel dimostrare che l'unica radice positiva non è intera per u, v interi positivi.

3. Semplici calcoli numerici forniscono i risultati della seguente tabella, nella quale si considera $v = 1$; $n = 3, 4, 5$; $u = 1, 2, 3$. Da essa si rileveranno il massimo e il minimo valore assoluto della funzione aritmetica F_n, e risultano confermate le ovvie osservazioni del n° 2. (1)

x	$F_3(x;1,1)$	$F_3(x;2,1)$	$F_3(x;2,1)$	$F_4(x;1,1)$	$F_4(x;2,1)$	$F_5(x;1,1)$	$F_5(x;2,1)$
1	18	36	60	64	174	210	780
2	29	53	88	159	353	749	2069
3	34	64	100	288	590	1858	4408
4	27	63	105	415	849	3627	8007
5	2	44	92	480	1070	5906	12'836
6	— 47	1	55	399	1169	8185	18.505
7	— 126	— 72	— 12	64	1038	9474	24'144
8	....	— 181	— 115	— 657	— 545	8183	28'283
9	....	....	....	— 1920	— 466	2002	28'732
10	....	....	....	....	— 2175	— 12219	22'461
11	....	....	....	....	....	— 38590	5480
12	....	....	....	....	....	....	— 27'281
13	....	....	....	....	....	....	— 82'092