Bollettino Unione Matematica Italiana

Alessandro Ossicini

Sulla sommabilità delle serie di Legendre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.3, p. 218–225.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_3_218_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Sulla sommabilità delle serie di Legendre.

Nota di ALESSANDRO OSSICINI (a Roma).

Sunto. - *Il lavoro è sunteggiato nella breve, seguente introduzione.*

YOSHIMI MATSUMRA [1] ha dimostrato per le serie del FOURIER che:

Se $f(x)$ è una funzione reale sommabile e se k è un numero intero positivo ($k \geq 2$), allora, in ogni punto x. in cui $\Theta(h) = 0(h)$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} [S_{\nu^k}(x) - f(x)] = 0,$$

dove

$$\Theta(h) = \int_0^h |\Theta_x(t)| \, dt;$$

$$\Theta_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x);$$

$$S_{\nu^k}(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\nu^k} [a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx].$$

Noi proviamo che un teorema analogo sussiste per le serie di polinomi di LEGENDRE; cioè che:

Se $f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$ *è sommabile nell'intervallo* $(-1, 1)$, *e se* k *è un numero intero positivo* ($k \geq 2$), *allora. in ogni punto* x *interno all'intervallo* $(-1. 1)$ *in cui*

$$\Theta(h) = \int_0^h [f(x \pm t) - f(x)] dt = 0(h) \tag{1}$$

si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} [S_{\nu^k}(x) - f(x)] = 0, \tag{2}$$

[1] Cfr. YOSHIMI MATSUMRA, *On the summability of Fourier series*, (« Jornal of the Osaka Institute of Sciences and Techonology »). Vol. 1, n. 2, novembre 1949, pagg. 91-95).

essendo

$$S\nu^k(x) = \sum_{m=0}^{\nu^k} a_m P_m(x) \tag{3}$$

dove $P_m(x)$ *è l'* m^esimo^ *polinomio di Legendre, e*

$$a_m = \frac{1}{2}(2m+1)\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) dx.$$

La somma (3), in base alla formula sommatoria di CHRISTOFEEL [2], ha l'espressione

$$S\nu^k(x) = \frac{1}{2}(\nu^k + 1)\int_{-1}^{1} f(x) \frac{P\nu^k(x)P\nu^k{}_{+1}(x') - P\nu^k{}_{+1}(x)P\nu^k(x)}{x'-x} dx'. \tag{4}$$

ed essendo

$$1 = \frac{1}{2}(\nu^k + 1)\int_{-1}^{1} \frac{P\nu^k(x)P\nu^k{}_{+1}(x') - P\nu^k{}_{+1}(x)P\nu^k(x')}{x'-x} dx',$$

si ha

$$R\nu^k(x) = S\nu^k(x) - f(x) = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2}(\nu^k + 1)\int_{-1}^{1} [fx') - f(x)] \frac{P\nu^k(x)P\nu^k{}_{+1}(x') - P\nu_{\gamma+1}(x)P\nu^k(x')}{x'-x} dx'.$$

Sia s un numero positivo < 1, e decomponiamo s nella somma di due numeri positivi μ ed ε, $\mu + \varepsilon = 1$, sia d un numero positivo $0 < d \leq \mu$ e μ_x, μ'_x due funzioni di x definite in $(-1, 1)$ che soddisfano le limitazioni

$$d \leq \mu_x \leq \mu\,; \qquad d \leq \mu'_x \leq \mu$$

allora, per $-1 + s \leq x \leq 1 - s$, si ha

$$R\nu^k(x) = I\nu^k(x) + T\nu^k(x), \tag{5$_1$}$$

ove

$$I\nu^k(x) = \frac{1}{2}(\nu^k + 1)\int_{-1}^{x-\mu_x} \Theta(x, x') g\nu^k(x, x')\, dx' + \tag{5$_2$}$$

$$+ \frac{1}{2}(\nu^k + 1)\int_{x+\mu'_x}^{1} \Theta(x, x') g\nu^k(x, x') dx,$$

$$T\nu^k(x) = \frac{1}{2}(\nu^k + 1)\int_{x-\mu_x}^{x+\mu'_x} \Theta(x, x') g\nu^k(x, x'), \tag{5$_4$}$$

(2) Cfr. G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali.* (Zanichelli, Bologna 1946) pagg. 159.

con

$$\Theta(x,\ x') = f(x') - f(x);$$

$$g_{\nu^k}(x) = \frac{P_{\nu^k}(x)P_{\nu^k+1}(x') - P_{\nu^k+1}(x)P_{\nu^k}(x')}{x' - x}.$$

b) Con dimostrazione analoga a quella del teorema di HOBSON, sulla convergenza delle serie del LEGENDRE, si prova che si ha uniformemente per $-1 + s \leq x \leq 1 - s$ [3]:

$$\lim_{\nu \to \infty} I_{\nu^k}(x) = 0 \tag{6}$$

se ci riferiamo ad archi compresi tra zero e π [4], posto

$$x' = \cos \gamma'; \qquad x = \cos \gamma; \qquad 0 < \gamma < \pi; \qquad 0 < \gamma' < \pi;$$

$$1 - \varepsilon = \cos \rho; \qquad 1 - (\mu + \varepsilon) = \cos(\rho + \tau); \qquad 0 < \rho < \frac{\pi}{2};$$

$$0 < \tau; \qquad \rho + \tau < \frac{\pi}{2};$$

e, se indichiamo con $\eta (\eta > 0)$ il minimo di arcos u — arcos $(u + \mu)$ per u in $(-1,\ 1 - \mu)$, si ha

$$T_{\nu^k}(\cos\gamma) = \frac{1}{2}(\nu^k + 1)\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} \Theta_1(\gamma,\ \gamma')g_{\nu^k}(\gamma,\ \gamma')\,\mathrm{sen}\,\gamma' d\gamma' \tag{7}$$

con

$$\Theta_1(\gamma,\ \gamma') = f(\cos\gamma) - f(\cos\gamma');$$

$$g_{\nu^k}(\gamma,\ \gamma') = \frac{P_{\nu^k}(\cos\gamma)P_{\nu^k+1}(\cos\gamma') - P_{\nu^k}(\cos\gamma')P_{\nu^k+1}(\cos\gamma)}{\cos\gamma' - \cos\gamma};$$

$$\rho + \tau \leq \gamma \leq \pi - (\rho + \tau) \qquad [0 < \eta \leq \tau].$$

Con successive trasformazioni si ottiene

$$T_{\nu^k}(\cos\gamma) = U_{\nu^k}(\gamma) + A_{\nu^k}(\gamma), \tag{8}$$

con

$$U_{\nu^k}(\gamma) = \frac{2(\nu^k + 1)}{\pi^2(2\nu^k + 1)(2\nu^k + 3)a_{\nu^k}a_{\nu^k+1}}\,\frac{1}{\mathrm{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma}\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} \Theta_1(\gamma,\gamma')\,\frac{\mathrm{sen}(\nu^k+1)(\gamma-\gamma')\,\mathrm{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma'}{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\,d\gamma \tag{9}$$

$$a_{\nu^k} = \frac{(2\nu^k - 1)!!}{(2\nu^k)!!} < \frac{1}{\sqrt{\pi\nu^k}} \tag{10}$$

(3) Cfr. G. SANSONE, loc. cit. (2), pagg. 200.
(4) Cfr. G. SANSONE, loc. cit. (2), pagg. 205.

e

$$\lim_{\nu \to \infty} A_{\nu^k}(\gamma) = 0$$

la convergenza a zero è uniforme quando γ varia in $(\rho + \tau, \pi - \rho - \tau)$.

Ora

$$(12_1) \qquad \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} R_{\nu^k}(x)\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} I_{\nu^k}(x)\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} T_{\nu^k}(x)\right|$$

e per la (8) essendo $x = \cos\gamma$

$$(12_2) \qquad \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} T_{\nu^k}(\cos\gamma)\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} U_{\nu^k}(\gamma)\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu^k}(\gamma)\right|;$$

dalla (6) poichè

$$(12_3) \qquad \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} I_{\nu^k}(x)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left|I_{\nu^k}(x)\right|$$

segue che la somma a primo membro della (12_3) tende a zero per $n \to \infty$ uniformemente rispetto ad x in $(-1+s,\ 1-s)$ e per la (11), poichè

$$(12_4) \qquad \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu^k}(\gamma)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left|A_{\nu^k}(\gamma)\right|$$

si giunge allo stesso risultato per la somma a primo membro della (12_4). Per completare la dimostrazione del teorema resta da provare che

$$(13) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} U_{\nu^k}(\gamma)\right| = 0.$$

c) Premettiamo una limitazione per la somma:

$$(14) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu^k} \operatorname{sen}(\nu^k + 1)y \qquad 0 < y < \pi$$

ove

$$(15) \qquad f_{\nu^k} = \frac{2(\nu^k + 1)}{\pi^2(2\nu^k + 1)(2\nu + 3)a_{\nu^k}a_{\nu^k+1}};$$

limitazione che ci sarà utile per la dimostrazione della (13). Posto

$$\sigma_s = \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{sen}(\nu^k + 1)y$$

applicando la trasformazione di BRUNACCI–ABEL ([5]) alla (14), abbiamo

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu^k} \operatorname{sen}(\nu^k + 1)y = \sigma_1(f_1{}^k - f_2{}^k) + \sigma_2(f_2{}^k - f_3{}^k) + \dots + \sigma_n f_n{}^k$$

([5]) Cfr. G. SANSONE, loc. cit. ([2]), pag 185.

ma

$$\sigma_s \leq \left| \sum_{\nu=1}^{s} e^{i(\nu^k+1)y} \right| = \left| \sum_{\nu=1}^{s} e^{i\nu^k y} \right| \leq \text{(}^6\text{)}$$

$$\leq 21\, s\left(\alpha y^{\frac{1}{q-2}} + \beta s^{-\frac{2k}{q}} y^{-\frac{2}{q}} + s^{-\frac{2}{q}}\right) \leq$$

$$\leq 21\, n\left(\alpha y^{\frac{1}{q-2}} + \beta n^{-\frac{2k}{q}} y^{-\frac{2}{q}} + n^{-\frac{2}{q}}\right)$$

ove

$$q = 2^k, \qquad (k \geq 2); \qquad \alpha = \left(\frac{k\,!}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2-q}}; \qquad \beta = \left(\frac{k\,!}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{q}};$$

ne segue

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu^k} \operatorname{sen}(\nu^k+1)y \right| \leq 21\, n\left(\alpha y^{\frac{1}{q-2}} + \beta n^{-\frac{2k}{q}} y^{-\frac{2}{q}} + n^{-\frac{2}{q}}\right) \cdot \left(|f_{1^k} - f_{2^k}| + |f_{2^k} - f_{3^k}| + \dots + |f_{(n-1)^k} - f_{n^k}| + |f_{n^k}|\right) \tag{17}$$

ed essendo

$$f_{1^k} < f_{2^k} < f_{3^k} < \dots < f_{(n-1)^k} < f_{n^k}$$

si ha

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu^k} \operatorname{sen}(\nu^k+1)y \right| \leq 21 n f_{n^k}\left(\alpha y^{\frac{1}{q-2}} + \beta n^{-\frac{2k}{h}} y^{-\frac{2}{q}} + n^{-\frac{2}{q}}\right)$$

e a causa della (10)

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu^k} \operatorname{sen}(\nu^k+1)y \right| \leq 21 n\alpha\left(\alpha y^{\frac{1}{q-2}} + \beta n^{-\frac{2k}{q}} y^{-\frac{2}{q}} + n^{-\frac{2}{q}}\right) \tag{18}$$

con Q costante assoluta.

d) Ora, per n sufficientemente grande si ha

$$\frac{1}{n}\left| \sum_{\nu-1}^{n} U_{\nu^k}(\gamma) \right| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} V_{\nu^k,1}(\gamma) \right| + \frac{1}{n}\left| \sum_{\nu=1}^{n} V_{\nu^k,2}(\gamma) \right| \tag{19}$$

$$\frac{1}{n}\left| \sum_{\nu=1}^{n} V_{\nu^k,3}(\gamma) \right| < \left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} V_{\nu^k,4}(\gamma) \right| + \frac{1}{n}\left| \sum_{\nu=1}^{n} V_{\nu^k,5}(\gamma) \right|$$

con

$$V_{\nu^k,1}(\gamma) = \int_{\gamma-\eta}^{\gamma-\frac{1}{n}} \frac{\Theta_1(\gamma, \gamma') f_{\nu^k} \operatorname{sen}(\nu^k+1)(\gamma-\gamma') \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\gamma'}{\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} \gamma \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\, d\gamma' \tag{20$_1$}$$

(6) Cfr. Y. Matsumra, loc. cit. (1), pagg. 92.

$$(20_2)\qquad V_{\nu^k,2}(\gamma)=\int\limits_{\gamma-\frac{1}{n}}^{\gamma-\frac{1}{n^k}}\frac{\Theta_1(\gamma,\gamma')f_{\nu^k}\operatorname{sen}(\nu^k+1)(\gamma-\gamma')\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma'}{\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\,d\gamma'$$

$$(20_3)\qquad V_{\nu}^{k},{}_3(\gamma)=\int\limits_{\gamma-\frac{1}{n^k}}^{\gamma+\frac{1}{n^k}}\frac{\Theta_1(\gamma,\gamma')f_{\nu}{}^{k}\operatorname{sen}(\nu^k+1)(\gamma-\gamma')\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma'}{\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\,d\gamma'$$

$$(20_4)\qquad V_{\nu}^{k},{}_4(\gamma)=\int\limits_{\gamma+\frac{1}{n^k}}^{\gamma+\frac{1}{n}}\frac{\Theta_1(\gamma,\gamma')f_{\nu}{}^{k}\operatorname{sen}(\nu^k+1)(\gamma-\gamma')\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma'}{\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\,d\gamma'$$

$$(20_5)\qquad V_{\nu}^{h}.{}_5(\gamma)=\int\limits_{\gamma+\frac{1}{n}}^{\gamma-\eta}\frac{\Theta_1(\gamma,\gamma')f_{\nu}{}^{k}\operatorname{sen}(\nu^k+1)(\gamma-\gamma')\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma'}{\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\,d\gamma'$$

consideriamo, la (20_1), posto $\gamma-\gamma'=y$, si ha

$$(21)\qquad \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n}V_{\nu}^{k},{}_1(\gamma)\right|\leq\frac{H}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\eta}\frac{\psi(y)\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}(\gamma-y)f_{\nu}{}^{k}\operatorname{sen}(\nu^k+1)y\,dy}{\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}y}\right|$$

con

$$(22)\qquad H=\frac{1}{\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}(\rho+\tau)}$$

e

$$\psi(y)=f[\cos(\gamma-y)]-f(\cos\gamma)$$

e per la (18)

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}V_{\nu}^{k},{}_1(\gamma)\right|\leq 21\,L\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\eta}|\,\psi(y)\,|\,(\alpha y^{\frac{1}{q-2}-1}+\beta n^{-\frac{2k}{q}}y^{-\frac{2}{q}-1}+n^{-\frac{2}{q}}y^{-1})\,dy$$

ove $L=H\cdot Q$. è una costante assoluta.

Poichè come conseguenza della (1) abbiamo

$$\int_0^h |\psi(y)|\, dy = \Psi(h) \;= 0(h) \quad (^7) \tag{23}$$

ne segue che, scelto μ ed in conseguenza η convenientemente piccolo, si ha

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} V_\nu^k,{}_1(\gamma)\right| \leq 0(1) \quad (^8) \tag{24}$$

analogamente

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} V_\nu^k,{}_5(\gamma)\right| \leq 0(1). \tag{25}$$

Se consideriamo la (20_2) abbiamo

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} V_\nu^k,{}_2(\gamma)\right| \leq 21\, L \int_{\frac{1}{n^k}}^{\frac{1}{n}} |\psi(y)|\, (\alpha y^{\frac{1}{q-2}-1} + \beta u^{-\frac{2k}{q}} y^{-\frac{2}{q}-1} + n^{-\frac{2}{q}} y^{-1})\, dy$$

quindi

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} V_\nu^k,{}_2(\gamma)\right| \leq 0(1) \quad (^9) \tag{26}$$

analogamente

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} V_\nu^k,{}_4(\gamma)\right| \leq 0(1). \tag{27}$$

Se consideriamo infine la (20_3) e teniamo conto delle (22), (10), abbiamo

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} V_\nu^k,{}_3(\gamma)\right| \leq \frac{H}{n}\int_{-\frac{1}{n^k}}^{\frac{1}{n^k}} |\psi(y)| \left|\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu^k \operatorname{sen}(\nu^k + 1)y\right| dy$$

$$\leq \frac{L}{n}\int_{-\frac{1}{n^k}}^{\frac{1}{n^k}} |\psi(y)| \sum_{\nu=1}^{n} (\nu^k + 1)y\, dy \leq \frac{M}{n}\int_{-\frac{1}{n^k}}^{\frac{1}{n^k}} |\psi(y)|\, n^{k+1} dy$$

ove M è una conveniente costante.

(7) Cfr. A. Foà, *Sulla sommabilità forte delle serie di Legendre*. « Bollettino Unione Matematica », ottobre-dicembre 1942, serie II, anno V, n. 1.

(8) Cfr. Y. Matsumra, loc. cit. (1), pag. 94.

(9) Cfr. Y. Matsumra, loc. cit. (1), pag. 93.

Dalla condizione (23) segue

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} V_{\nu}{}^{k}{}_{.3}(\gamma)\right| \leq M n^{k} \Psi\left(\frac{1}{n^{k}}\right) = 0(1) \text{ [10]}. \tag{28}$$

Si ha così a causa delle (5), (5_1), (8), (19), (6). (11), (24), (25), (26), (27), (28), che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n} R_{\nu}{}^{k}(x)\right| = 0. \tag{29}$$

[10] Cfr. Y. MATSUMRA, loc. cit, [1], pag 93.