Bollettino Unione Matematica Italiana

Dionigi Gallarati

Alcune questioni relative a particolari quartiche piane di genere uno.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.3, p. 215–218.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_3_215_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Alcune questioni relative a particolari quartiche piane di genere uno

Nota di DIONIGI GALLARATI (a Genova)

Sunto. - *Come le prime righe della nota.*

1. V. DALLA VOLTA e M. DEDÒ hanno rilevato di recente, con metodi diversi, alcune proprietà delle quartiche piane ellittiche (1).

Le stesse proprietà, insieme con altre, si possono stabilire anche pensando la c^4 piana ellittica come proiezione piana d'una c^4 sghemba ellittica Γ, e rappresentando analiticamente Γ, al modo solito, mediante le equazioni parametriche:

$$x = \wp(u) \qquad y = \wp'(u) \qquad z = \wp''(u)$$

(1) V. DALLA VOLTA, *Su alcuni tipi di quartiche piane* « Rend. Acc. Lincei », (8) 3 (1947_1), pp. 301-303. M. DEDÒ, *Proprietà fondamentali delle quartiche piane dotate di punti doppi con tangenti inflessionali* « Per. di Matematiche », (4) 29 (1951), pp. 11-32.

ove u è l'integrale abeliano di 1ª specie esistente su Γ, scelto in modo che la condizione di complanarità di quattro punti di Γ sia

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2} \ (^2).$$

2. Dimostriamo quì le seguenti proprietà:

Se una quartica piana ellittica ha un biflecnodo A *ed un altro punto doppio qualunque* B:

I) *I punti di contatto della curva con le tangenti uscenti da* B *sono a coppie allineati con* A.

II) *Gli ulteriori punti di intersezione con* c^4 *delle due tangenti a* c^4 *nel punto* B *sono allineati col biflecnodo* A.

Se c^4 è proiezione d'una quartica sghemba ellittica Γ da un punto O su un piano π, i punti A e B sono le tracce su π di due corde di Γ uscenti da O. Poichè A è un biflecnodo la retta OA è una delle 24 corde principali di Γ e detti $u_1 u_2$ i due punti in cui essa si appoggia a Γ risulta:

(1) $$3u_1 + u_2 \equiv 0 \qquad 3u_2 + u_1 \equiv 0.$$

Se u_3 ed u_4 sono i punti di appoggio su Γ della corda OB, poichè $u_1 u_2 u_3 u_4$ appartengono al piano OAB segue:

(2) $$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 .$$

Se u_5 è il punto di contatto di Γ con uno dei piani tangenti uscenti da Ou_3u_4 risulta

(3) $$u_3 + u_4 + 2u_5 \equiv 0 .$$

Se u_6 è l'ulteriore punto in cui il piano $(u_1 u_2 u_5)$ sega Γ si ha:

$$u_1 + u_2 + u_5 + u_6 \equiv 0$$

da cui

(4) $$2u_1 + 2u_2 + 2u_5 + 2u_6 \equiv 0 .$$

Dalle (1) (2) segue:

(5) $$3u_1 + 3u_2 \equiv u_3 + u_4$$

e dalle (2) (4), sommando:

$$3u_1 + 3u_2 + (u_3 + u_4 + 2u_5) + 2u_6 \equiv 0$$

ossia tenendo conto delle (3) e (5):

$$u_3 + u_4 + 2u_6 \equiv 0$$

(2) Il metodo qui seguito è già nominato da M. Dedo, loc. cit., nella (1) pag. 28.

e quindi u_6 è punto di contatto d'un altro piano tangente di Γ uscente dalla corda OB. Con ciò è dimostrata la proprietà I).

Siano t_3 e t_4 le tangenti a Γ in u_3 ed u_4. I piani Ot_3 ed Ot_4 seghino ulteriormente Γ rispettivamente in u_7 ed in u_8. Risulta allora:

$$2u_3 + u_4 + u_7 \equiv 0 \qquad 2u_4 + u_3 + u_8 \equiv 0.$$

Di qui segue:

$$3u_3 + 3u_4 + u_7 + u_8 \equiv 0.$$

Ma dalle (1) (2) si ha:

$$3u_3 + 3u_4 \equiv -3u_1 - 3u_2 \equiv u_1 + u_2$$

e quindi

$$u_1 + u_2 + u_7 + u_8 \equiv 0$$

e ciò dimostra la proprietà II).

3. Dalla proprietà I) scendono come casi particolari i seguenti risultati di V. Dalla Volta.

a) In una c^4 piana ellittica con due biflecnodi le due rette uscenti da uno di essi e tangenti altrove alla curva hanno i punti di contatto allineati con l'altro.

b) In una c^4 piana ellittica con un biflecnodo ed una cuspide i quattro punti di contatto delle tangenti alla curva uscenti dalla cuspide sono a coppie allineati col biflecnodo.

c) Se una delle tangenti in B è di flesso anche B è un biflecnodo: Infatti se una delle tangenti in B è di flesso uno dei punti di contatto delle tangenti condotte da B a toccare altrove la curva coincide con B. Poichè la retta AB deve contenere un altro di tali punti, anche questo deve coincidere con B, che quindi risulta un biflecnodo. La dimostrazione di questo caso particolare risulta particolarmente semplice; infatti alle ipotesi di cui al caso generale va aggiunta la seguente $3u_3 + u_4 \equiv 0$. Dalle (2) si ha $3u_1 + 3u_2 + 3u_3 + 3u_4 \equiv 0$, da cui per la (5) $u_3 + u_4 - u_4 + 3u_4 \equiv 0$ ed infine $u_3 + 3u_4 \equiv 0$.

Rileviamo esplicitamente anche la seguente proprietà della quartica sgemba ellittica Γ: Se di due corde incidenti di Γ una è corda principale e l'altra si appoggia a Γ in due punti $u_3 u_4$ di cui uno, ad esempio u_3, stà nel piano osculatore dell'altro anche u_4 stà nel piano osculatore di u_3 e quindi anche questa seconda corda è corda principale.

Dalla proprietà II) scende come caso particolare il seguente risultato di V. Dalla Volta:

d) Se una quartica piana ellittica ha un biflecnodo A ed una cuspide B la tangente cuspidale sega la curva nel punto di contatto della (unica) tangente uscente dal biflecnodo.

Osserviamo infine che la c) è anche un caso particolare della II): Se infatti una delle tangenti in B è di flesso anche l'altra deve essere di flesso se no segherebbe ulteriormente la curva in un punto che dovrebbe appartenere alla retta AB, il che è assurdo.