Bollettino
Unione Matematica Italiana

Dionigi Gallarati

Sopra una notevole superficie del 6° ordine.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.3, p. 213–215.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_3_213_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Sopra una notevole superficie del 6° ordine.

Nota di DIONIGI GALLARATI (a Genova)

Sunto. - *Si dimostra che una superficie di 6° ordine con punto quadruplo può al più possedere 45 punti doppi, e che tale limite è effettivameate raggiunto.*

Con procedimento analogo a quello seguito da E. G. TOGLIATTI [1] per stabilire che una superficie di 5° ordine con un punto triplo possiede al più 24 punti doppi (limite effettivamente raggiunto), si dimostra che una superficie di 6° ordine con punto quadruplo può al più possedere 45 punti doppi e che tale limite è effettivamente raggiunto. Sia F una superficie di 6° ordine con un punto quadruplo in O (1000):

$$F: x_0^2 A_4(x_1x_2x_3) - 2x_0 B_5(x_1x_2x_3) + C_6(x_1x_2x_3) = 0.$$

essendo A_4, B_5, C_6 forme ternarie di grado uguale all'indice. Possiamo rappresentare F sopra un piano doppio π mediante proiezione da O. La curva di diramazione di π è la traccia Γ su π del cono Γ^{10} di equazione $B_5^2 - A_4 B_6 = 0$. Γ è curva di contatto per la quartica A traccia su π del cono $A_4 = 0$, tangente ad F in O.

Se F è priva di linee multiple (e quindi anche irriducibile) Γ non possiede componenti multiple ed i punti doppi di Γ, non situati

(7) Cfr. G. SANSONE, loc. cit., pag. 184.

(8) Per queste si veda ad es. T. FORT, *Finite differences and difference equations in the real domain*, (Oxford, 1948).

su A, provengono necessariamente da punti doppi conici di F [1]. F^6 avrà il massimo numero di punti doppi, compatibile col punto quadruplo, quando Γ ha il massimo numero di punti doppi non situati su A, compatibile col suo ordine. D'altra parte una C^N piana spezzata in k parti, possiede al più

$$\frac{N\,(N-3)}{2}+k$$

punti doppi [2].

Il massimo numero di punti doppi per una curva del 10^0 ordine è dunque 45 e si ha quando essa è spezzata in 10 rette. Se nessuno di questi 45 punti doppi di Γ appartiene ad A si ha una F^6 con un punto quadruplo e 45 punti doppi conici isolati. Resta da vedere se un tale spezzamento sia effettivamente possibile per una curva di ordine 10 che debba essere di diramazione per un piano doppio.

Sia $A_4(x_1x_2x_3)=0$ una quartica piana generale, quindi di genere $p=3$. Tra le sue 28 bitangenti se ne possono scegliere (ed in più modi) 10 tali che i loro punti di contatto con $A_4=0$ appartengano ad una curva di 5^0 ordine, $f_5=0$, non contenente $A_4=0$ come parte [3]

Combinando linearmente f_5, con una quintica spezzata in A_4 ed in una retta se ne trova un sistema lineare ∞^3, Σ.

Scegliamo una curva generica di Σ, $B_5\,(x_1x_2x_3)=0$. Siano $d_i=0$ le equazioni delle 10 bitangenti. Le C^{10} del fascio

$$B_5{}^2-\lambda\, d_1d_2\ldots d_{10}=0 \tag{1}$$

hanno le loro 40 intersezioni con $A_4=0$ tutte assorbite dai 20 punti di contatto delle 10 bitangenti d_i.

Se P è un punto generico di A_4, la C^{10} del fascio (1) che passa per P ha almeno 41 intersezioni con $A_4=0$. E quindi, essendo A_4 irriducibile, la contiene come parte, e pertanto esiste un polinomio

(1) E. G. TOGLIATTI, *Alcune osservazioni intorno ad una particolare superficie di 5° ordine. - Studi in onore di Salvatore Ortu Carboni.* Genova 1935, pp. 253-259. (Tipografia del Senato).

(2) Se una C^N piana è spezzata in k parti irriducibili $C_i^{n_i}(\sum_1^k n_i=N)$ il massimo numero di punti doppi che può possedere (considerando punti doppi anche i punti di intersezione due a due delle C_i) è:

$$\sum_1^k\frac{1}{2}(n_i-1)(n_i-2)+\sum_1^k n_in_j=\frac{1}{2}(\sum_1^k n_i)^2-\frac{3}{2}\sum_1^k n_i+k=\frac{N(N-3)}{2}+k\,.$$

(3) J. STEINER, *Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten,* « Journal für Math. », (1755), p. 271 § VII.

di sesto grado $C_6(x_1x_2x_3)$, ed un valore λ_0 di λ tali che

$$\lambda_0\, d_1 d_2 \dots d_{10} = B_5^2 - A_4 C_6$$

Allora la F^6 di equazione:

$$x_0^2\, A_4(x_1x_2x_3) - 2x_0\, B_5(x_1x_2x_3) + C_6(x_1x_2x_3) = 0$$

possiede un punto quadruplo ordinario A_0 (1000), senza singolarità infinitamente vicine (essendo il cono tangente in A_0 irriducibile e privo di generatrici multiple) e 45 punti doppi conici isolati. Non credo si conosca una F^6 con un numero di punti singolari isolati superiore a questo.

È noto che il SEVERI nel 1946 assegnava per il numero d dei punti doppi isolati di una F^n la limitazione $d \leq \binom{n+2}{3} - 4$ che per $n = 4, 5, 6, \dots$ fornisce i confini $16, 31, 52, \dots$ Tale limite può essere superato, come ha mostrato il SEGRE, almeno per valori abbastanza alti di n. La superficie F^6 qui considerata, con un punto quadruplo e 45 punti doppi, presenta un numero di punti multipli isolati molto vicino al limite assegnato dal SEVERI, e fa pensare, a causa della presenza di un punto quadruplo, che, anche per $n = 6$, il limite assegnato dal SEVERI possa essere superato qualora la F^6 abbia solo punti doppi.