Lorenzo Calabi

Sulla dimensione dei sottogruppi non chiusi di un gruppo di Lie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.3, p. 206–208.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_3_206_0>

Sulla dimensione dei sottogruppi non chiusi di un gruppo di Lie.

Nota di LORENZO CALABI (a Strasbourg).

Sunto. - *Determinazione di un limite superiore per la dimensione di un sottogruppo di* LIE *non chiuso d'un gruppo di* LIE *semplicemente connesso.*

G. D. MOSTOW [1] ha mostrato che un gruppo di LIE semplicemente connesso di dimensione n non può avere sottogruppi di LIE non chiusi di dimensione superiore a $n - 5$. Questo risultato può essere precisato dal

TEOREMA. - *Sia* G *un gruppo di Lie semplicemente connesso di dimensione* n, K *un sottogruppo compatto massimale* [2] *isomorfo al prodotto* $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_m$ *dei gruppi semplici* K_i *di rango* r_i [3].

1) *Affinchè* G *ammetta un sottogruppo di Lie non chiuso è necessario e sufficiente che* $r_1 + r_2 + \ldots + r_m \geq 2$.

2) *Inoltre, se* $r = min(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ *e* $s = max(2, r)$, *la dimensione di un sottogruppo di Lie non chiuso è al più uguale a* $n - 2s - 1$. *Il valore* $n - 2s - 1$ *può essere raggiunto solo se esistono due indici diversi* i, j *tali che* $r_i = r_j = 1$.

Se G, e dunque K, non è semplicemente connesso, è noto che può esistere un sottogruppo non chiuso di dimensione $n - 1$.

* * *

LEMMA 1. - *Sia* H *un sottogruppo di Lie connesso, non chiuso del gruppo di Lie* G. H *ammette una decomposizione* $H = K'R^pR_1R_2\ldots R_q$, *ove* K' *è un sottogruppo compatto massimale di* H; R^p *e* R_i *per* $i = 1, 2, \ldots, q$ *sono sottogruppi abeliani semplicemente connessi di dimensione rispettiva* p *ed* 1, *chiusi in* H; *le intersezioni* $K' \cap R^p$, $K' \cap R_1$, $R^p \cap R_1$, $R_i \cap R_j$ $i \neq j$, *sono ridotte all'elemento neutro.* $p > 0$; *ogni sottogruppo non discreto di* R^p *è non chiuso in* G *e la sua aderenza è compatta.*

A. MALCEV ha mostrato (Corollario al teor. 15 di [4]) che l'intersezione di H e di almeno un sottogruppo compatto massimale K di G non è ridotta all'elemento neutro: $H \cap K$ è un gruppo di LIE

(1) G. D. MOSTOW, « Ann. of. Math. », 52 (1950), pagg. 606-636.

(2) K è un sottogruppo compatto massimale se è connesso e se non è contenuto in alcun altro sottogruppo compatto connesso.

(3) Il rango d'un gruppo compatto è la dimensione massima che un suo sottogruppo abeliano può avere.

e ammette dunque una decomposizione $H \cap K = K'R_1'R_2' \dots R_p'$ ([4], teor. 11) con $p > 0$, ché altrimenti H sarebbe chiuso. Sia d'altra parte $H \cap K = SL$ una decomposizione di LEVI, ove S è un sottogruppo semisemplice e L il radicale. S è chiuso (§ 5, coroll. 2 di [1]) e dunque compatto: $S \subset K'$. Possiamo scrivere $H \cap K = SK''R_1'R_2' \dots R_p'$, ove $K''R_1'R_2' \dots R_p'$ è un gruppo risolubile la cui aderenza in G è compatta: esso è perciò abeliano e isomorfo a $T^l R^p$, ove T^l è il prodotto di l circonferenze.

È chiaro che ogni sottogruppo non discreto di R^p è non chiuso in G e di aderenza compatta: inoltre, se $G = KR_1R_2 \dots R_h$, $H = (H \cap K)(H \cap R_1 \dots R_h) = H'R^pR_{i_1}R_{i_2} \dots R_{i_q}$.

LEMMA 2. - *L'aderenza* $\overline{\mathrm{H}}$ *d'un sottogruppo di Lie non chiuso* H *d'un gruppo di Lie semisemplice compatto* G *è contenuta in un sottogruppo proprio di* G *di rango massimo* [5].

Se $H = ST^lR^p$, allora $\overline{H} = ST^{l'}$ (confronta [4], teor. 13, coroll. 3): $T^{l'}$ è nel centro di $\overline{H}$ (e quindi T^lR^p è nel centro di H) e $l' > p > 0$. Il centro di $\overline{H}$ non è dunque contenuto nel centro di G: di conseguenza $\overline{H}$ è contenuto in un sottogruppo proprio di rango massimo (il normalizzatore del centro di $\overline{H}$ [6]).

COROLLARIO. - *Sia* G *un gruppo di Lie semplice compatto di dimensione* n *e di rango* r. *La dimensione d'un sottogruppo di Lie non chiuso* H *è inferiore e non uguale a* n — 2r — 1.

Visto il Lemma 2, dal Corollario al Teorema 3 di [6] segue $\dim H \leq n - 2r - 1$; ma la lista di pag. 219 di [6] permette di constatare facilmente che il valore $n - 2r - 1$ non è mai raggiunto.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA.

1) Sia $H = K'R^pR_1R_2 \dots R_q$ un sottogruppo non chiuso di G; poichè $p > 0$, la condizione $r_1 + r_2 + \dots + r_m \geq 2$ è ben necessaria. Ch'essa sia sufficiente è noto, giacchè ogni T^l con $l \geq 2$ ammette un sottogruppo non chiuso [7],

2) Possiamo sempre ammettere che, per ogni i, si abbia $r_1 \leq r_i$ e quindi $(n_1 - 2r_1) + n_2 + \dots + n_m \geq n_1 + \dots + (n_i - 2r_i) + \dots + n_m$ se n_i è la dimensione di K_i.

Supponiamo $r_i \geq 2$ per $i = 1, 2, \dots, m$: visto il Lemma 2, il suo

[4] A. MALCEV, « Rec. Math. Moscou », 16 (1945), pagg. 163-189.

[5] Un sottogruppo di G è detto di rango massimo se ha rango uguale a quello di G.

[6] A. BOREL et J. DE SIEBENTHAL, « Comm. Math. Helv. », 23 (1949), pagg. 200-221.

[7] Questa prima parte del teorema è anche una facile conseguenza del teor. 15 di [4].

Corollario ed il § 3 di (6), un sottogruppo non chiuso di G ha certamente una dimensione più piccola e non uguale a $n - 2r_1 - 1$ e perciò più piccola e non uguale a $n - 2s - 1$ (notazione dell'enunciato).

Supponiamo $r_1 = 1$ e $2 \leq r_2 \leq r_i$ per $i \geq 2$; se H non contiene K_1 la dimensione di H è inferiore a quella che si ottiene supponendo $K_1 \subset H$: e quest'ultima è inferiore a $n - 2r_2 - 1$, quindi a $n - 2s - 1$.

Supponiamo ora $r_1 = r_2 = 1$, e dunque $n_1 = n_2 = 3$. K_1 e K_2 sono isomorfi e tutti i loro sottogruppi sono chiusi e di dimensione 1. $K_1 \times K_2$ ammette un sottogruppo non chiuso di dimensione $1 = n_1 + n_2 - 5$. Qualunque siano i valori degli r_i con $i > 2$, si ha certamente che la dimensione di H è inferiore o uguale a $n - 5 = n - 2s - 1$.

* * *

Quanto precede mostra che si può affermare anche che: *se* G *è un gruppo di Lie semisemplice compatto di dimensione* n *e di rango* r, *e se* G′ *è un sottogruppo di Lie il cui centro non è contenuto nel centro di* G, G′ *è contenuto in un sottogruppo proprio di* G *di rango massimo ed ha quindi al più dimensione* n — 2r.

Ciò vale in particolare per ogni G' non semisemplice. Il valore $n - 2r$ può essere raggiunto anche se G è semplice. Ricordiamo che possono esistere sottogruppi non contenuti in un sottogruppo di rango massimo (8).