Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Sulle quasi-asintotiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.3, p. 195–197.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_3_195_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Sulle quasi-asintotiche.

Nota di MARIO VILLA (a Bologna).

Sunto. - *Si fanno alcune osservazioni su alcuni recenti lavori di* G. SABAN *sulle quasi-asintotiche.*

1. Sono apparsi recentemente alcuni lavori di G. SABAN (1) sulle varietà quasi-asintotiche ordinarie e anche sulle curve (e varietà) quasi-asintotiche a più indici, nozione questa da me introdotta (2). Questi lavori del SABAN sono inquinati da alcune sviste che alterano profondamente i risultati. Nell'ultimo dei lavori citati il SABAN conclude erroneamente che le curve quasi-asintotiche a più indici sostanzialmente non esistono. Qui darò le ragioni dell'errore.

2. Date due varietà V_k, $V_m (k > m)$, tali che V_m appartenga a V_k, una curva γ di V_m si dice quasi-asintotica a tre indici $\gamma_{p,q,r}$ di (V_k, V_m) quando in un suo punto generico lo spazio congiungente l'$S(p)$ osculatore a V_k, l'$S(q)$ osculatore a V_m e l'$S(r)$ osculatore ad essa $(p < q < r)$ ha dimensione minore del massimo corrispondente ai valori assegnati di k, m, p, q, r (3).

(1) G. SABAN, *Sulle varietà quasi-asintotiche*; Nota I. Proprietà elementari collegate alla nozione di specie; Nota II. Varietà subordinate di varietà quasi-asintotiche; Nota III. Ancora sulle varietà subordinate; « Rend. Accademia Naz. Lincei », s. VIII; vol. VIII, p. 562; vol. IX, p. 55; vol. X, p. 113 (1950-51). G. SABAN, *Quasi-asintotiche ad* n *indici e teoremi di variabilità degli indici.* « Rend. di Mat. e delle sue Appl. ». Roma, s. V, vol. IX, p. 429 (1950).

(2) Il dott. VAONA si era proposto di caratterizzare sulla V_4^6 delle coppie di punti di due piani (V_4^6 di SEGRE) le curve rappresentative delle curve caratteristiche di una trasformazione puntuale. Sotto lo stimolo di questo problema, io introdussi le curve (e varietà) quasi-asintotiche a più indici. Le curve caratteristiche di una trasformazione puntuale si caratterizzano allora in modo semplice e suggestivo sulla V_4^6 di SEGRE dando luogo alle curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ di essa. Si veda: VILLA e VAONA, *Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale*, « Rend. Accademia Naz. Lincei », s. VIII, vol. VIII, p. 470 (1950).

(3) Com'è notissimo, dicesi $S(r)$ osculatore ad una varietà V_k in un suo punto P lo spazio lineare di dimensione minima che contiene il punto P ed i punti derivati fino a quelli di ordine r. Ricordo anche la definizione delle

Casi *banali* di $\gamma_{p,q,r}$ sono offerti dalle curve di V_m in ogni punto delle quali l' $S(p)$ osculatore a V_k e l' $S(q)$ osculatore a V_m hanno uno spazio congiungente di dimensione minore dell'ordinario [4]. Casi banali di $\gamma_{p,q,r}$ sono pure costituiti dalle curve quasi-asintotiche $\gamma_{p,r}$ di V_k, situate su V_m, e dalle curve quasi-asintotiche $\gamma_{q,r}$ di V_m.

Ora, il SABAN arriva alla conclusione che le uniche quasi-asintotiche $\gamma_{p,q,r}$ sono quelle banali suddette! A p. 437 dell'ultimo lavoro citato egli afferma «Lo spazio $S^{k_r}(\rho_r)$ ha, con lo spazio congiungente $S^{k_p}(\rho_p)$ ed $S^{k_q}(\rho_q)$, una intersezione di dimensione maggiore a quella solita. Cioè $S^{k_r}(\rho_r)$ ha con $S^{k_p}(\rho_p)$ o con $S^{k_q}(\rho_q)$ oppure con ambedue questi spazi, una intersezione di dimensione superiore a quella che comunemente le compete». Ciò non è ovviamente: $S^{k_r}(\rho_r)$ può benissimo avere con lo spazio congiungente $S^{k_p}(\rho_p)$ ed $S^{k_q}(\rho_q)$ un'intersezione di dimensione maggiore a quella ordinaria pur avendo singolarmente con $S^{k_p}(\rho_p)$ e con $S^{k_q}(\rho_q)$ un'intersezione di dimensione perfettamente ordinaria! Da quella argomentazione errata il SABAN trae appunto la conclusione che le uniche quasi-asintotiche a tre indici sono costituite dagli anzidetti casi banali! E tutto quanto si è ora detto per le curve quasi-asintotiche a tre indici, vale immutato per le curve e varietà quasi-asintotiche a più di tre indici, rifacendo il SABAN anche per queste le stesse argomentazioni [5].

L'ultimo dei lavori citati del SABAN, viziato così alla base, cade per intero, in quanto l'Autore viene a limitare le sue considerazioni ai casi banali di curve (e varietà) quasi-asintotiche a più indici. E per lo stesso motivo perde interesse la terza delle Note citate del SABAN.

E voglio pur notare che nei lavori miei e di altri si è insistito sull'esistenza di quasi-asintotiche non banali e si sono dati esempi al riguardo [6].

curve e varietà quasi-asintotiche ordinarie (cioè a due indici): una varietà V_m, situata su una varietà $V_k (k > m)$, è quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ per V_k quando l' $S(r)$ osculatore a V_k in un punto generico di V_m e l' $S(s)$ ivi osculatore a V_m hanno uno spazio congiungente di dimensione minore del massimo corrispondente ai valori assegnati di k, m, r, s.

[4] Queste curve costituiscono una striscia quasi-asintotica (VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali degeneri*, « Mem. Accademia Scienze Bologna », s. IX, vol. IX, p. 19, 1942).

[5] Alle pp. 441, 442, 443 del quarto dei lavori citati.

[6] Si veda VILLA e VAONA, op. cit., p. 472 nota (7): VILLA e VAONA, *Alcune osservazioni sulle curve caratteristiche delle trasformazioni cremo-*

3. Nel n. 6 del primo dei lavori citati il SABAN afferma che « le uniche varietà non regolari in ogni loro punto che non siano spazi lineari o contenute in essi (7), sono le varietà luoghi di spazi lineari ». Proposizione anche questa erronea. Essa non vale neppure per le superficie (8) e le conseguenze tratte dal SABAN sono pure erronee.

Nel n. 12 del secondo dei lavori citati il SABAN afferma « se tutte le curve di una V_h (giacente su una V_m) sono quasi-asintotiche $\gamma_{1,2}$ per V_m le $\gamma_{1,2}$ riempiono almeno un S_h subordinato della V_m o se no appartengono ad uno spazio lineare di dimensione maggiore (9) ». Proposizione anche questa erronea (10) dalla quale il SABAN deduce altre due proposizioni (11), pure erronee. contraddette dai risultati del n. 4 della Nota del dott. MURACCHINI che appare in questo stesso fascicolo.

niane, questo « Bollettino », s. III, vol. V, p. 101 (1950). A p. 106 di quest'ultimo lavoro sono indicati esempi di curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ non banali (immagini sulla V_4^6 di SEGRE delle curve caratteristiche di certe trasformazioni cubiche).

Del resto altri esempi di curve $\gamma_{1,2,3}$ non banali si costruiscono subito. Ogni V_1 di una V_2 situata sopra una V_3 dell'S_6 è, in generale. $\gamma_{1,2,3}$ per $(V_2,\ V_3)$ non banale. E ancora: su una V_2 situata sopra una V_4 dell'S_8 esistono tre sistemi ∞^1 di $\gamma_{1,2,3}$, in generale, non banali. Se la V_4 è quella di SEGRE i tre sistemi di $\gamma_{1,2,3}$ rappresentano i tre sistemi di curve caratteristiche della trasformazione puntuale rappresentata dalla V_2.

(7) È da ritenere che l'A. intenda dire: contenute in spazi lineari di dimensione sufficientemente bassa.

(8) Per le superficie ad $S(2)$ osculatore non regolare in un punto generico, cioè soddisfacenti ad un'equazione di LAPLACE, si veda ad es.: FUBINI e ČECH, *Geometria proiettiva-differenziale*, Bologna, Zanichelli. vol. II. p. 736 (1927).

(9) L'A. intende dire: spazio lineare appartenente a V_m.

(10) Il SABAN crede di poter dedurre la proposizione dal seguente mio risultato: Se ogni E_1 di una V_h è E_1 di $\gamma_{1,2}$ la V_h è un S_h (VILLA. *Ricerche sulle curve qnasi-asintotiche*, Nota I. « Rend. Accademia Naz. Lincei », s. VI. vol. XXVIII, p. 251 (1938)). Ma le curve in questione sono $\gamma_{1,2}$ per la V_m e non per la V_h e l'applicazione di tale mio risultato non è quindi lecita.

(11) Le due proposizioni sono le seguenti:

« Tutte e sole le varietà quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$ di specie massima e di dimensione $h(h < m)$ di una varietà generica V_m sono contenute negli spazi lineari $S_k(h < k < m)$ di questa ».

« Se una varietà V_m è priva di spazi lineari subordinati di dimensione $> h$, mancano su questa varietà le varietà quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$ di specie massima e di dimensione superiore ad h ».

Per particolari V_m la prima proposizione può sussistere. Così avviene per la Grassmanniana delle rette. Si veda: G. VAONA, *Curve e superficie quasi-asintotiche della varietà di Grassmann che rappresenta le rette di uno spazio lineare*, questo « Bollettino », s. III, vol. IV, p. 395 (1949).