Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco G. Tricomi

Applicazione della funzione gamma incompleta allo studio della somma di vettori casuali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.3, p. 189–194.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_3_189_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Applicazione della funzione gamma incompleta allo studio della somma di vettori casuali (1).

Nota di Francesco G. Tricomi (a Pasadena, Calif.).

Sunto. - *Con l'ausilio della funzione gamma incompleta si determina una espressione asintotica. valida per grandi valori di* n, *della funzione di ripartizione probabilistica del modulo* r *della somma di* n *vettori unitari diretti a caso, in uno spazio ad un numero qualsiasi* p *di dimensioni. Dal risultato ottenuto si deduce in particolare che il valor medio* $\bar{r}$ *di* r *è tale che*

$$\bar{r} = \frac{\Gamma(p/2 + 1/2)}{\Gamma(p/2)}\sqrt{\frac{2n}{p}}\left[1 + \frac{1}{4(p+2)n} + O(n^{-2})\right].$$

1. In uno spazio euclideo a $p \geq 2$ dimensioni si considerino n vettori di determinati moduli $a_1 . a_2, \ldots, a_n$ ma di direzioni (e versi) del tutto casuali. Qual'è il valore più probabile del modulo r della loro somma? Meglio ancora, qual'è l'espressione della relativa *funzione di ripartizione* $P_n(r)$, cioè della funzione tale che $P_n(r_0)$ esprima la probabilità che sia $r \leq r_0$?

Questo problema — che si presenta in svariate questioni di fisica matematica, di biologia, ecc. — può, in certo qual modo, considerarsi risolto dalla formula di Kluyver (2) che fornisce $P_n(r)$

(1) Ricerca eseguita nell'àmbito del « Bateman Manuscript Project », finanziato dall'*Office of Naval Research* degli U. S. A.

(2) Vedi G. N. Watson, *Bessel Functions*, (2nd Ed., Cambridge, New York, 1944) pag. 421.

sotto forma di un integrale improprio operante su funzioni di BESSEL:

$$(1) \qquad P_n(r) = \frac{[\Gamma(\nu+1)]^{n-1} 2^{(n-1)\nu} r^{\nu+1}}{(a_1 \cdot a_2 \dots a_n)^\nu} \int_0^\infty t^{-(n-1)\nu} J_{\nu+1}(rt) \prod_{m=1}^n J_\nu(a_m t) dt, \qquad \left(\nu = \frac{p}{2} - 1\right).$$

In ispecie, nel particolarmente importante caso dei vettori *unitari*, cioè nel caso

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1,$$

si ha

$$(2) \qquad P_n(r) = [\Gamma(\nu+1)]^{n-1} 2^{(n-1)\nu} r^{\nu+1} \int_0^\infty t^{-(n-1)\nu} J_{\nu+1}(rt) [J_\nu(t)]^n dt.$$

D'altro lato, la precedente « distribuzione » potrebbe anche mettersi agevolmente in connessione con la somma di più variabili casuali di probabilità costanti, la cui *densità di probabilità* determinai esplicitamente io stesso parecchi anni or sono ([3]).

Tuttavia quel che più importa praticamente non è tanto di ottenere l'espressione rigorosa — per necessità di cose alquanto complicata — di $P_n(r)$, bensì di ottenere una possibilmente semplice espressione asintotica di tale funzione, valida per grandi valori di n. La cosa è effettivamente possibile. Precisamente WATSON nell'op. cit. ricava, un po' alla buona, dalla (2) l'espressione asintotica

$$(3) \qquad P_n(r) \backsim \frac{1}{\Gamma(p/2+1)} \left(\frac{r^2 p}{2n}\right)^{p/2} {}_1F_1\left(\frac{p}{2}; \frac{p}{2}+1; -\frac{r^2 p}{2n}\right)$$

dove il segno $\backsim$ significa che il rapporto fra il primo e il secondo membro tende ad 1 per $n \to \infty$ ed ${}_1F_1$ è il simbolo della funzione *ipergeometrica confluente*

$$(3) \qquad {}_1F_1(a; c; x) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \dots$$

che io ora uso indicare invece con $\Phi(a, c; x)$.

([3]) F. TRICOMI, *Ueber die Summe mehrerer zufälliger Veränderlichen mit konstanten Verteilungsgesetzen.* « Jahresber. Deutsch. Math. Vereinigung », 42 (1932) 174-179. Il risultato trovasi già, in altra, molto meno esplicita forma, in LAPLACE.

Recentemente W. R. BENNET, « Quart. Applied Math. » 5 (1948), 385-393, ha determinata esplicitamente la *trasformata di Hankel* (d'ordine *zero*) della funzione $1 - P_n(r)$ nel caso $p = 2$, deducendo da essa uno sviluppo in serie di funzione di BESSEL di $P_n(r)$ che dà buoni risultati numerici.

Nella presente Nota – che è sorta dall'osservazione che la funzione confluente che figura nella (3) non è altro che la funzione gamma incompleta — mi propongo di legittimar meglio la (3), di migliorarla (aggiungendovi un secondo termine) e, nel tempo stesso, di semplificarla facendo tesoro dell'osservazione precedente.

2. Come primo passo trasformiamo leggermente la (2) ponendo in essa $t = 2\sqrt{\tau/n}$ e sostituendo (come riesce tante volte utile!) all'usuale funzione di Bessel $J_\nu(x)$ la corrispondente funzione *uniforme*

$$E_\nu(x) = x^{-\nu/2} J_\nu(2\sqrt{x}) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{x}{1!\,\Gamma(\nu+2)} + \frac{x^2}{2!\,\Gamma(\nu+3)} - \cdots$$

si ottiene così

$$P_n(r) = [\Gamma(\nu+1)]^{n-1}\left(\frac{r^2}{n}\right)^{\nu+1}\int_0^\infty \tau^\nu E_{\nu+1}(r^2\tau/n)[E_\nu(\tau/n)]^n d\tau. \tag{4}$$

Ciò posto osserviamo che dette a_2, a_3, ... delle costanti dipendenti solo da ν, di cui la prima ha l'espressione

$$a_2 = -[2(\nu+1)^2(\nu+2)]^{-1}, \tag{5}$$

si ha

$$\Gamma(\nu+1)E_\nu(\tau/n)e^{\frac{\tau/n}{\nu+1}} = \left[1 + \frac{\tau/n}{\nu+1} + \frac{(\tau/n)^2}{2(\nu+1)(\nu+2)} - \cdots\right]\times$$
$$\times\left[1 + \frac{\tau/n}{\nu+1} + \frac{(\tau/n)^2}{2(\nu+1)^2} + \cdots\right] = 1 + a_2\left(\frac{\tau}{n}\right)^2 + a_3\left(\frac{\tau}{n}\right)^3 + \cdots.$$

Conseguentemente potremo scrivere che

$$[E_\nu(\tau/n)]^n = [\Gamma(\nu+1)]^{-n} e^{-\frac{\tau}{\nu+1}}\left[1 + a_2\left(\frac{\tau}{n}\right)^2 + a_3\left(\frac{\tau}{n}\right)^3 + \cdots\right]^n =$$
$$= [\Gamma(\nu+1)]^{-n} e^{-\frac{\tau}{\nu+1}}\left[1 + a_2^{(n)}\left(\frac{\tau}{n}\right)^2 + a_3^{(n)}\left(\frac{\tau}{n}\right)^3 + \cdots\right]$$

avendo indicati con $a_k^{(n)}$ dei coefficienti determinati, nel caso di una generale serie di potenze, dalle formule [4]

$$a_0^{(n)} = a_0^n;\ a_k^{(n)} = \frac{n}{k}\sum_{h=0}^{k-1}(k-h)a_{k-h}a_h^{(n-1)}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

[4] In questi ultimi tempi mi sono ripetutamente servito, con molto giovamento, dei coefficienti della potenza di una serie di potenze in questioni asintotiche. Il collega Erdélyi mi ha fatto recentemente notare come tali coefficienti siano stati già usati fin dal 1917 da O. Perron, (« Munch. Sitzungsber. », 1917, pagg. 191-219) in questioni del genere, ma poi sono caduti in dimenticanza.

e, nel nostro speciale caso in cui è $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, dalle formule

$$a_0^{(n)} = 1,\ a_1^{(n)} = 0,\ a_2^{(n)} = na_2,\ a_3^{(n)} = na_3,\ a_4^{(n)} = na_4 + \frac{1}{2}n(n-1)a_2^2, \ldots .$$

La cosa qui più interessante è che queste ultime formule, unitamente alla relazione ricorrente (6), mostrano come per $k \geq 3$ sia $a_k^{(n)} = O(n^{k-2})$. Potrà pertanto scriversi che

$$[E_\nu(\tau/n)]^n = [\Gamma(\nu+1)]^{-n} e^{-\frac{\tau}{\nu+1}}\left[1 + \frac{a_2}{n}\tau^2 + \frac{1}{n^2}A(\tau)\right],$$

avendo indicato con $A(\tau)$ una funzione (intera) di τ, dipendente sì anche da n (nonchè da ν), ma certo *limitata per* $n \to \infty$. E sostituendo nella (4) si avrà

$$P_n(r) = \frac{(r^2/n)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{\nu+1}}\tau^\nu E_{\nu+1}(r^2\tau/n)\left[1 + \frac{a_2}{n}\tau^2 + \frac{1}{n^2}A(\tau)\right]d\tau.$$

Meglio ancora, servendosi del noto simbolo della trasformazione di LAPLACE:

$$\mathfrak{L}_s[F(\tau)] \equiv \int_0^\infty e^{-s\tau}F(\tau)d\tau$$

e ponendo momentaneamente $1/(\nu+1) = s$, potremo scrivere che

$$(7) \qquad P_n(r) = \frac{(r^2/n)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}\left\{\mathfrak{L}_s[\tau^\nu E_{\nu+1}(r^2\tau/n)] + \mathfrak{L}_s[\tau^{\nu+2}E_{\nu+1}(r^2\tau/n)] + O(n^{-2})\right\}$$

considerato che la funzione $E_{\nu+1}(r^2\tau/n)$ resta limitata non solo per $n \to \infty$ ma anche per $r \to \infty$.

3. Le due trasformate di LAPLACE che figurano nella (7) possono calcolarsi esplicitamente per mezzo della formula

$$\mathfrak{L}_s[t^{\beta-1}E_{\alpha-1}(kt)] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}s^{-\beta}\Phi\left(\beta,\ \alpha:\ -\frac{k}{s}\right), \qquad (\Re\beta > 0)$$

che non è altro se non la formula (2) (di HANKEL), a p. 393 di WATSON (op. cit.), posta in una veste più semplice. Precisamente servendosi anche della fondamentale relazione di KUMMER:

$$\Phi(a,\ c;\ x) = e^x\Phi(c-a,\ c;\ -x)$$

nonchè della formula

$$\Phi(1,\ \alpha+1;\ x) = \alpha e^x x^{-\alpha}\gamma(\alpha,\ x)$$

che riconduce la funzione Φ con $a = 1$ alla *funzione gamma in-*

completa:

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \qquad (\Re\alpha > 0),$$

e tenendo conto del valore di s, si ha

$$\mathfrak{L}_s[\tau^\nu E_{\nu+1}(r^2\tau/n)] = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+2)}(\nu+1)^{\nu+1}\Phi\left(\nu+1, \nu+2; -\frac{\nu+1}{n}r^2\right) =$$
$$= \left(\frac{r^2}{n}\right)^{-\nu-1}\gamma\left(\nu+1, \frac{\nu+1}{n}r^2\right)$$

$$\mathfrak{L}_s[\tau^{\nu+2} E_{\nu+1}(r^2\tau/n)] = \frac{\Gamma(\nu+3)}{\Gamma(\nu+2)}(\nu+1)^{\nu+3}\Phi\left(\nu+3, \nu+2; -\frac{\nu+1}{n}r^2\right) =$$
$$= (\nu+2)(\nu+1)^{\nu+3} e^{-\frac{\nu+1}{n}r^2}\Phi\left(-1, \nu+2; \frac{\nu+1}{n}r^2\right) =$$
$$= (\nu+2)(\nu+1)^{\nu+3} e^{-\frac{\nu+1}{n}r^2}\left(1 - \frac{\nu+1}{\nu+2}\frac{r^2}{n}\right).$$

Sostituendo nella (7), scrivendo $p/2 - 1$ in luogo di ν, tenendo conto della (5) e ponendo per brevità

$$\frac{\nu+1}{n}r^2 = \frac{pr^2}{2n} = x \tag{8}$$

si giunge alla ben semplice formula definitiva

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)P_n(r) = \gamma\left(\frac{p}{2}, x\right) - \frac{1}{n}e^{-x}x^{p/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{p+2}\right) + O(n^{-2})}. \tag{9}$$

Fra l'altro la (9) mostra che, così come dev'essere, $P_n(r)$ tende ad 1 per $r \to \infty$. Inoltre essa mostra che la meno precisa formula (3) di WATSON è corretta *purchè sia* $x = o(n)$, cioè $r = o(n)$.

Notiamo ancora che, essendo p un intero, la funzione $\gamma(p/2, x)$ può ricondursi all'*esponenzialintegrale* o all'*integrale degli errori* secondo che p è pari o dispari ([5]).

4. La (9) permette pure di determinare subito uno degli elementi statisticamente più interessanti della nostra « distribuzione », cioè il *valor medio* $\bar{r}$ di r, definito della formula

$$\bar{r} = \int_0^\infty r\frac{dP_n}{dr}dr = \int_0^\infty [1 - P_n(r)]dr.$$

([5]) Cfr. p. es. F. G. TRICOMI, *Sulla funzione gamma incompleta*, (« Annali Matem. Pura Appl. », (4), 31 (1950).

Invero dalla (9) segue che

$$\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\bar{r} = \int_0^\infty \left\{ \left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) - \gamma\left(\frac{p}{2}, x\right)\right] + \frac{1}{n} e^{-x} x^{p/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{p+2}\right) + O(n^{-2}) \right\} d\left(\sqrt{\frac{2nx}{p}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n}{p}} \left\{ \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) - \gamma\left(\frac{p}{2}, x\right)\right] dx + \frac{1}{2n}\int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{p-1}{2}} dx - \frac{1}{n(p+2)}\int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{p+1}{2}} dx + O(n^{-2}) \right\}.$$

Ma, da una nota formula sulla trasformata di Laplace della funzione gamma incompleta si deduce in particolare (per $s = 0$) che

$$\int_0^\infty t^{\beta-1}[\Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, t)]dt = \frac{1}{\beta}\Gamma(\alpha+\beta), \quad (\Re\beta > 0,\ \Re(\alpha+\beta) > 0),$$

dunque, ponendo $\beta = 1/2$, si ha

$$\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\bar{r} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n}{p}} \left\{ 2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) + \frac{1}{2n}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) - \frac{1}{n(p+2)}\Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right) + O(n^{-2}) \right\}$$

da cui, con brevi calcoli, segue che

$$\bar{r} = \frac{\Gamma(p/2 + 1/2)}{\Gamma(p/2)}\sqrt{\frac{2n}{p}}\left[1 + \frac{1}{4(p+2)n} + O(n^{-2})\right]. \tag{10}$$

In particolare nello spazio ordinario ($p = 3$) si ha

$$\bar{r} = 2\sqrt{\frac{2n}{3\pi}}\left[1 + \frac{1}{20n} + O(n^{-2})\right] = \tag{10'}$$

$$= 0{,}921\sqrt{n}\left[1 + \frac{1}{20n} + O(n^{-2})\right].$$

Questa formula è servita al mio collega M. Delbrück per spiegare come certe uova di animali marini (che, nella fecondazione. fissano esteriormente un gran numero di spermatozoi, ciascuno arrecante un certo *spin*) si vedono spesso girare nel campo del microscopio.

Per $p = 2$ i precedenti risultati sono in pieno accordo coi dati numerici contenuti nel cit. lavoro del Bennet.