Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Le varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore alla ordinaria.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.2, p. 97–103.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_2_97_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Le varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore alla ordinaria.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna).

Sunto. - *Si comunicano alcuni risultati, che verranno dimostrati in una Memoria successiva, sulle* V_k *i cui* S_k *tangenti ricoprono una varietà* W *di dimensione inferiore a* 2k, *in particolare si determinano tutte quelle varietà, nel caso* $k = 5$.

1. Una varietà V_k, a k dimensioni, immersa in uno spazio proiettivo $S_r (r > 2k)$ possiede, in generale, ∞^k spazi tangenti S_k che ricoprono una varietà W di dimensione $2k$. Può accadere, per particolari varietà V_k, che la relativa W abbia dimensione inferiore a $2k$ e si pone il problema di determinare quelle varietà. Questo problema ha interesse anche per altre questioni di geometria proiettiva differenziale, come è stato posto in evidenza dal VILLA (1), che mi ha suggerito la presente ricerca. Il TERRACINI (2) ha dimostrato che:

Se la varietà W, *relativa ad una* V_k, *ha dimensione* $2k - 1$, *allora la* V_k *soddisfa* $d = \frac{k(k-1)}{2} + 1$ *equazioni di Laplace linear-*

(1) M. VILLA: *Nuove ricerche nella teoria delle curve quasi-asintotiche.* « Annali di Mat. », S. IV, T. XVIII (1939).

M. VILLA: *Ricerche sulle varietà* V_k *che posseggono* $\infty^\delta E_2$ *di* $\gamma_{1,3}$ *con particolare riguardo al caso* $k = 4$, $\delta = 8$. « R. Acc. Naz. Lincei, Memorie », S. VI, vol. VII, F. VI (1939).

(2) A. TERRACINI: ***Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà.*** « Atti R. Acc. Sc. Torino ». Nota I, vol. XLIX (1913-14); Nota II, vol. LI (1916); Nota III vol. LV (1919-20).

mente indipendenti oppure soddisfa ad un sistema di equazioni di Laplace, in numero inferiore a d, *e però tale che il sistema delle forme quadratiche associate* [3] *ha un sistema apolare con matrice jacobiana nulla, di caratteristica* k — l, *e viceversa.*

Il TERRACINI [4] ha determinato le V_k che rappresentano $\frac{1}{2}k(k-1)+l$ equazioni di LAPLACE l. i., stabilendo che:

Una V_k *che soddisfi ad* $\frac{1}{2}k(k-1)+l\,(l>0)$ *equazioni di Laplace l. i. sta su di una varietà* U_q, *luogo di* ∞^h S_p, *con* S_{2k-h-l} *tangente fisso* [5] *lungo ogni* S_p, *essendo* $0 \leq h \leq k-l$.

Le due proposizioni precedenti riducono la ricerca delle V_k, per le quali la W ha dimensione inferiore a $2k$, a quella delle varietà che rappresentano un sistema di $d < \frac{k(k-1)}{2} + l$ equazioni di LAPLACE l. i. avente un sistema di forme quadratiche associate con sistema apolare a matrice jacobiana di caratteristica $k - l$. Il TERRACINI ha già risolto la questione, nei casi $k=3, 4$, nel lavoro citato in [1], che contiene anche importanti risultati relativi a valori qualsiansi di k. Poggiando su quei risultati ho apportato alcuni nuovi contributi alla ricerca ed ho risolto la questione per $k=5$, quanto ho potuto stabilire è oggetto di una Memoria che apparirà sulla « Rivista di Matematica dell'Università di Parma ». Nella presente Nota riassumo i risultati ivi conseguiti.

2. Seguendo la via indicata dal TERRACINI, la prima questione che si presenta è quella di determinare i tipi di sistemi lineari di quadriche [6] dello S_{k-1}, di dimensione δ con

$$k - l \leq \delta \leq \frac{1}{2}(k-l-1)(k-l+2) \qquad (l>0) \tag{1}$$

a matrice jacobiana di caratteristica $k - l$. Il TERRACINI ha mostrato che, risolta che sia la questione per $l=1$, segue la soluzione

[3] Alla equazione di LAPLACE $\sum_{i,j} a_{ij}x^{(ij)} + \sum_r a_r x^{(r)} + ax = 0$, $(i, j, r = 1, \ldots, k)$ si associa (Cfr. TERRACINI, op. cit. in [1]) la forma quadratica $\sum_{i,j} a_{ij}\theta_i\theta_j = 0$, nelle variabili $\theta_1, \ldots, \theta_k$.

[4] A. TERRACINI: *Sulle* V_k *che rappresentano più di* $\frac{1}{2}k(k-1)$ *equazioni di Laplace linearmenti indipendenti.* « Rend. Circ. Matematico Palermo », t. XXXIII (1912).

[5] Ossia: gli S_q tangenti nei punti di uno S_p stanno in uno S_{2k-h-l}.

[6] Diciamo ora quadriche, anzichè forme quadratiche, perchè interpretiamo le θ_i che compaiono in [2] come coordinate proiettive omogenee in uno S_{k-1}.

per l qualsiasi (7); mi riferirò dunque al caso $l = 1$. I seguenti tipi di sistemi lineari sono palesemente a matrice jacobiana di caratteristica $k - 1$:

a) sistemi lineari di S_0-coni col vertice S_0 in comune, di dimensione δ soddisfacente alla (1) per $l = 1$,

b) sistemi lineari di quadriche passanti per uno S_h ed uno S_{k-h-2} (fra loro sghembi), con $h \geq 1$, di dimensione δ soddisfacente alla (1) per $l = 1$.

c) sistemi lineari di quadriche, di dimensione δ (soddisfacente alla (1) per $l = 1$) contenenti un sistema lineare di dimensione $\delta - \rho$, a matrice jacobiana di caratteristica $k - \rho - 1$, con $0 \leq \rho < k - 3$ (8).

Orbene ho dimostrato che per $k = 5$ i tipi suindicati esauriscono tutte le possibilità; infatti i sistemi lineari di quadriche dello S_4, a matrice jacobiana di caratteristica 4 e dimensione δ, con $4 \leq \delta \leq 9$ sono dei tipi seguenti:

1) sistemi lineari $\infty^\delta (4 \leq \delta \leq 9)$ di S_0-coni col vertice S_0 in comune,

2) sistemi lineari $\infty^\delta (\delta = 4,\ 5)$ di quadriche per uno S_1 ed uno S_2 sghembi,

3) sistemi lineari ∞^δ $(4 \leq \delta \leq 6)$ contenenti un sistema lineare $\infty^{\delta-1}$ di S_1-coni, con l'S_1-vertice in comune,

4) sistemi lineari ∞^δ $(\delta = 4)$ contenenti un sistema lineare $\infty^{\delta-2}$ di S_2-coni, con l'S_2-vertice in comune, ossia contenenti il sistema di quadriche formate con le coppie di S_3 di un fascio,

5) sistemi lineari ∞^δ $(\delta = 4)$ contenenti un sistema $\infty^{\delta-1}$ di quadriche passanti per due S_2 (non di S_3).

Ho dimostrato inoltre che: *Per ogni* k ≥ 3 *e per*

$$\frac{1}{2}(k-1)(k-2) + 1 \leq \delta \leq \frac{1}{2}(k-2)(k+1),$$

(7) Infatti si ha che (Cfr. TERRACINI, op. cit. in (1), Nota I): segando un sistema lineare ∞^δ di quadriche dello S_{k-1}, a matrice jacobiana di caratteristica $k - l$, con un generico S_{k-2} si ottiene in questo ancora un sistema lineare ∞^δ a matrice jacobiana di caratteristica $k - l$. Sicchè, continuando, si perviene ad un sistema lineare ∞^δ di S_{k-l} a matrice jacobiana di caretteristica $k - l$, eguale alla dimensione dello S_{k-l}.

(8) Per $k = 3$ e $k = 4$ tutti i tipi di sistemi lineari di quadriche, della natura indicata, rientrano nei tipi *a*), *b*), *c*). Il TERRACINI in (1) si serve della determinazione, di quei tipi di sistemi lineari di quadriche dello S_3, che trovasi effettuata in un lavoro del BONFERRONI. Nel lavoro citato in (1) viene menzionat[illegible]e un lavoro di TOEPLITZ sull'argomento, del quale ho potuto aver c[illegible]a soltanto attraverso una recensione.

un sistema lineare ∞^δ *di quadriche dello* S_{k-1}, *a matrice jacobiana di caratteristica* $k-1$, *è necessariamente del tipo* a), *indicato sopra.*

Ho dimostrato anche una proposizione relativa al caso

$$\delta = \frac{1}{2}(k-1)(k-2),$$

per la quale rimando alla Memoria di cui ho detto nel n. 1; ed ho dedotto dai risultati relativi al caso $l=1$, gli analoghi per $l>1$ (in base a quanto s'è detto in (7)).

Non so se, come accade per $k=3, 4, 5$, i tipi *a*), *b*) e *c*) indicati prima, esauriscano tutte le possibilità. Osservo soltanto che in caso affermativo segue subito che, nei sistemi del tipo *c*), il sistema contenuto di dimensione $\delta - \rho$ risulta tale che la sua sezione con un generico $S_{k-\rho-1}$ è in quest'ultimo spazio un sistema lineare $\infty^{\delta-\rho}$, a matrice jacobiana di caratteristica $k-\rho-1$, di uno dei due tipi *a*) o *b*).

3. Dopo aver determinato i sistemi lineari di quadriche che occorrono, si è in grado di scrivere le equazioni di LAPLACE l. i. che costituiscono i sistemi rappresentati dalle V_k ricercate. La determinazione delle dette V_k si compie così integrando i sistemi ottenuti. Ho condotto a termine la ricerca nel caso $k=5$; i risultati si estendono talvolta senza grandi difficoltà al caso di k qualsiasi per quanto si riferisce ai sistemi di equazioni di LAPLACE per i quali il sistema lineare delle quadriche associate ha un sistema apolare (9) dei tipi *a*), *b*) del n. 2.

Passo ora ad esporre quanto trovasi nella Memoria di cui al n. 1. I sistemi di quadriche del tipo *a*) conducono a sistemi di d equazioni di LAPLACE l. i. con

$$k \leq d \leq \frac{1}{2}k(k-1)$$

fra le quali ve ne sono k che si possono ridurre alla forma

$$\left\{\begin{aligned} &x^{(kk)} = 0 \\ &x^{(ki)} = \sum_{1}^{k}{}_r\, a_{ir} x^{(r)} + a_i x. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Le V_k integrali sono rigate sviluppabili; sistemi del tipo indicato, ma comprendenti soltanto $d \leq 3k-7$ (per $k>4$) equazioni

(9) Il sistema lineare apolare di un sistema lineare di quadriche luogo è notoriamente un sistema di quadriche inviluppo. Nel n.° 2 abbiamo parlato di quadriche luogo; ma è chiaro che si dovranno considerare i sistemi di quadriche inviluppo, che corrispondono a quelli del n.° 2 per dualità, quando si considerino le quadriche associate come quadriche luogo.

di LAPLACE, sono stati già considerati dal TERRACINI [10]. Ho dimostrato le seguenti proposizioni:

Le radici della equazione in ρ

$$(3) \qquad | a_{i1} \quad a_{i2} \dots a_{ii} - \rho \dots a_{i,k-1} | = 0 \qquad (i = 1, \dots, k-1)$$

soddisfano tutte alla relazione

$$\rho^{(k)} + \rho^2 = 0.$$

Se ρ_1 *è una radice della* (3), *di molteplicità* s(> 1) *per la quale il determinante, a primo membro* (3), *ha caratteristica* k s — 1, *allora la* V^{k} *integrale del sistema* (2) *è una rigata sviluppabile che ammette una varietà direttrice di dimensione* k — s — 1, *descritta dal punto*

$$X = x^{(k)} - \rho_1 x.$$

Quest'ultimo risultato sussiste anche se viene a mancare la condizione relativa alla caratteristica del determinante a primo membro di (3), purchè la molteplicità s sia sufficientemente elevata.

Ho poi stabilito alcune diseguaglianze che permettono di assegnare una molteplicità minima per una radice almeno della equazione (3), quando sia assegnato il numero d di equazioni di LAPLACE l. i. del sistema che si considera. Si riesce così a mettere in relazione, sotto opportune condizioni, il numero delle equazioni di LAPLACE l. i. a cui soddisfa una V_k rigata sviluppabile con la dimensione minima delle direttrici esistenti sulla varietà stessa.

Per $k = 5$ si hanno i seguenti tipi di V_5 rigate sviluppabili:

a) S_0–coni proiettanti una V_4 non soddisfacente ad alcuna equazione di LAPLACE, oppure soddisfacente a δ equazioni di LAPLACE l. i., con $1 \leq \delta \leq 5$.

b) V_5 sviluppabili con curva direttrice, non soddisfacenti ad altre equazioni di LAPLACE l. i. oltre a quelle che risultano dalla proprietà detta, oppure soddisfacenti ad una o due ulteriori equazioni.

c) V_5 sviluppabili con superficie direttrice, generiche oppure soddisfacenti ad una ulteriore equazione di LAPLACE.

d) V_5 sviluppabili formate da ∞^2 S_3 tangenti ad una superficie generica.

4. I sistemi di quadriche del tipo *b*) e della massima dimensione possibile conducono, come già risulta dal lavoro citato in [1] del

[10] Op. cit. in [1], Nota II. Si veda anche, E. BOMPIANI: *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*, « Atti R. Acc. Sc. Torino », Vol. XLIX (1913-14).

TERRACINI, alle varietà di C. SEGRE che rappresentano le coppie di punti di due spazi lineari. Ho dimostrato che i sistemi del tipo *b*), contenuti in quelli di dimensione massima, fino alla dimensione $k-1$, conducono alle varietà proiezioni delle varietà di C. SEGRE in spazi di tutte le dimensioni, fino alla dimensione $2k$.

Rimangono ora da considerare i sistemi di equazioni di LAPLACE ai quali si è condotti partendo dai sistemi di quadriche el tipo *c*). Nell'ipotesi a cui ho accennato alla fine del n. 2. ipotesi che è verificata per $k=5$, i sistemi del tipo *c*) sono costituiti in uno dei due modi seguenti:

1) sistemi lineari ∞^{δ} di quadriche contenenti un sistema lineare $\infty^{\delta-\rho}$ di S_ρ-coni con l'S_ρ-vertice in comune ($\rho \geq 1$).

2) sistemi lineari di quadriche contenenti un sistema lineare di quadriche passanti per uno $S_{h+\rho}$ ed uno S_{k-h-2} (lo spazio congiungente essendo S_{k-1}) con $h>0$, $0<\rho<k-h-2$.

Per $k=5$ si hanno i sistemi 3), 4) e 5) del n. 2. I relativi sistemi di equazioni di LAPLACE conducono alle seguenti V_5, che insieme con quelle già descritte, forniscono tutti i tipi ricercati:

1) V_5 formate da ∞^3 superficie (sviluppabili o non) situate negli S_3 di un S_2-cono proiettante una V_3 generica, oppure soddisfacente ad una o due equazioni di LAPLACE: oppure situate negli S_3 di un S_1-cono proiettante una V_4 rigata sviluppabile che soddisfa a 6 equazioni di LAPLACE l. i. ([11]).

2) V_5 luogo di ∞^3 S_2, con S_6 tangente fisso lungo ogni S_2, per altro generica, oppure soddisfacente ad una o due ulteriori equazioni di LAPLACE.

3) V_5 formata da ∞^2 V_3 situate negli S_5 di un S_4-cono proiettante una superficie generica; la V_3 potendo essere di tutti i tipi che soddisfano a 4 equazioni di LAPLACE l. i. e stanno in S_5.

4) V_5 formate da ∞^2 V_3 situata negli S_4 di un S_1-cono proiettante una V_4 luogo di ∞^2 piani che soddisfa a 6 equazioni di LAPLACE l. i. ([11]); oppure situata negli S_4 di una V_6 luogo di ∞^2 S_4 con S_7 tangente fisso luogo ogni S_4. Le V_3 possono essere di tutti i tipi che soddisfano a 5 equazioni di LAPLACE l. i. e stanno in S_4.

5) V_5 luogo di ∞^2 S_3, con S_7 tangente fisso lungo ogni S_3 e per altro generica.

6) V_5 luogo di due sistemi di ∞^1 V_3, situata negli S_4 di un S_1-cono proiettante la V_4^6 di C. SEGRE. Le V_3 possono essere di diversi tipi.

7) V_5 luogo di ∞^1 V_3 rigate e di ∞^2 S_2, situati nei due sistemi ∞^1 di S_4 di un S_1-cono proiettante la V_4^6 di C. SEGRE.

([11]) Tali V_4 trovansi descritte nel lavoro citato in ([1]), Nota II.

8) V_5 luogo di ∞^1 V_4^6 di C. SEGRE tali che gli S_5 tangenti nei punti di una V_4^6 passano per un punto.

Si deve osservare che alcune delle V_5 che abbiamo descritto nella presente Nota si possono far rientrare in più d'uno dei tipi considerati.

Le ricerche svolte mi inducono a ritenere che i tipi di sistemi lineari di quadriche a matrice jacobiana di caratteristica $k-1$ siano soltanto quelli, *a*), *b*), *c*) indicato nel n. 2 e che le V_k relative rientrino tutte in uno dei seguenti tipi.

a) particolari V_k rigate sviluppabili.

b) V_k di C. SEGRE e loro proiezioni.

c) V_k situate su di una varietà U_q luogo di spazi S_p $(p > 1)$ e tale che la relativa W abbia dimensione $2k-1$ pur soddisfacendo la U_q ad un numero di equazioni di LAPLACE l. i. inferiore ad $\frac{1}{2}q(q-1)+2(q-k)+1$ soltanto:

d) V_k luogo di varietà di C. SEGRE ed aventi particolarità sulle quali non mi soffermo.

Nella Memoria che apparirà sulla « Rivista di Matematica dell'Università di Parma » si trovano anche risultati relativi ai casi con $l > 1$, sui quali non insisto.