
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIOVANNI LAMPARIELLO

Relatività ed elettrodinamica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 6
(1951), n.2, p. 118–142.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_2_118_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Relatività ed elettrodinamica.

Conferenza di GIOVANNI LAMPARIELLO (a Messina (*)).

Sunto. - Dopo aver fatto cenno delle idee principali che caratterizzano lo sviluppo storico-critico dell'elettrodinamica in relazione al principio di relatività, l'Autore rivolge l'attenzione al problema generale delle forze ponderomotrici nel campo elettromagnetico, di cui non si possiede ancora la soluzione.

INTRODUZIONE.

Un progresso essenziale fu compiuto in Dinamica quando NEWTON, muovendo dalle idee che GALILEO aveva espresse e mirabilmente commentate nei suoi *Dialoghi*, pose nei suoi *Principi matematici della Filosofia naturale* le basi della descrizione dei fenomeni meccanici del sistema solare.

Il sistema di riferimento della dinamica galileiana è la Terra, quello della dinamica newtoniana è lo spazio assoluto. NEWTON ha anche introdotto il concetto di tempo assoluto, il quale natura sua sine relatione ad externum quodvis, aequabiliter fluit.

GALILEO aveva scoperto che le leggi del moto dei gravi liberi o vincolati rispetto ad un sistema di riferimento S solidale con la Terra non cambiano se il fenomeno è giudicato da un sistema di riferimento S' animato da moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad S . Questa proprietà di struttura della dinamica galileiana si estende a quella newtoniana. Se si dice inerziale un sistema di riferimento esente da forze esterne, si può dire che:

(*) Conferenza tenuta al Seminario matematico dell'Università di Bologna il 24 febbraio 1951.

due qualunque sistemi inerziali S ed S' sono equivalenti per la descrizione dei fenomeni dinamici, ovvero, è impossibile rivelare la velocità di un sistema inerziale S con esperienze meccaniche eseguite in S .

Questa proprietà è stata chiamata *principio di relatività dei fenomeni dinamici* ovvero *principio di relatività di Galileo*, ma si potrebbe forse meglio qualificare *principio di invarianza* della dinamica newtoniana rispetto alle trasformazioni di GALILEO, quali sono quelle che operano il passaggio dall'uno all'altro di due sistemi inerziali.

Tale principio nega il carattere assoluto che NEWTON ha voluto conferire al sistema fondamentale in cui valgono per postulato i principi dinamici nella forma in cui egli li ha enunciati e per questa ragione la dinamica di GALILEO e NEWTON è già una teoria relativistica come lo è la geometria euclidea che implica un principio di relatività della direzione o, se si vuole, di invarianza delle proprietà metriche delle figure rispetto alle trasformazioni ortogonali.

NEWTON ha ancora introdotto il concetto di azione a distanza che domina la sua teoria della gravitazione.

I trionfi riportati dalla dottrina newtoniana nell'interpretazione dei fenomeni meccanici hanno determinato l'affermazione di una concezione meccanicistica del mondo che ha esercitato un'enorme influenza sull'evoluzione delle teorie fisiche in particolare e della Scienza in generale.

Al modello newtoniano si ispirarono COULOMB, POISSON, GREEN, GAUSS per la fondazione della teoria matematica dei fenomeni elettrostatici e magnetostatici, mentre AMPERE, BIOT, LAPLACE, ecc. hanno descritto in forma mirabile i fenomeni elettrodinamici conosciuti fino alla loro epoca.

Ancora nelle prime decadi del secolo XIX, YOUNG e FRESNEL gettavano le basi della teoria elastica della luce, affermando, in opposizione alla veduta di HUYGENS del carattere longitudinale delle onde luminose, il carattere trasversale delle onde stesse. L'etere costituiva con la sua struttura elastica sui generis un mezzo essenziale per la propagazione delle vibrazioni luminose.

L'analisi geniale dei fenomeni ottici nei corpi in moto condusse FRESNEL ad affermare un parziale trascinarsi dell'etere da parte dei corpi in moto e la sua veduta trovò più tardi conferma in una classica esperienza di FIZEAU.

Con la teoria elastica di FRESNEL si può dire che il complesso dei fenomeni ottici ricevesse una spiegazione soddisfacente; per quanto riguarda i fenomeni ottici dei corpi in moto la discussione

portava sulle seguenti caratteristiche delle onde luminose: direzione della propagazione (effetto di aberrazione), velocità di propagazione (effetto di trascinamento FRESNEL-FIZEAU), lunghezza d'onda o frequenza (effetto DOPPLER).

La determinazione quantitativa di questi effetti implica solo la prima potenza del rapporto $\beta = \frac{v}{c}$ della velocità del corpo alla velocità c di propagazione della luce nel vuoto. Per tale ragione tali effetti diconsi di prim'ordine. Ebbene, il principio di relatività di GALILEO si estende ai fenomeni ottici di prim'ordine.

Nelle sue famose ricerche sperimentali MICHELE FARADAY aveva introdotto l'ipotesi di un etere per i fenomeni elettrici e magnetici di struttura diversa da quello di FRESNEL e concepiva che il meccanismo delle azioni elettriche e magnetiche fosse diverso da quello delle azioni a distanza.

L'interazione di corpi elettrizzati o di magneti o di correnti elettriche è interpretata come il risultato di processi che si svolgono essenzialmente nello spazio, sia esso privo di materia oppure occupato da corpi ponderabili, di guisa che il campo elettrico o magnetico assume il carattere di un'entità fisica operante.

Così nasce il concetto di azione di campo in opposizione a quello di azione a distanza.

Indipendentemente da FARADAY per opera della scuola di Gottinga, si profilavano deviazioni dalla concezione newtoniana nel tentativo di una descrizione dei fenomeni elettrodinamici più soddisfacente di quella della scuola francese. Forse GAUSS (1845) ha rilevato per primo la necessità di una *Konstruierbare Vorstellung* di propagazione spazio-temporale e più tardi RIEMANN in un lavoro del 1858, pubblicato dopo la sua morte (1867) in un'opera dal titolo *Die neue mathematische Prinzipien der Naturphilosophie*, dice di aver trovato che l'azione elettrodinamica delle correnti elettriche può essere spiegata, supponendo che l'azione di ogni elemento di elettricità su altri elementi non avvenga istantaneamente, ma si propaghi con una velocità che, entro i limiti degli errori sperimentali, è uguale alla velocità c della luce.

Ciò che è importante rilevare è che RIEMANN nega l'esistenza di un etere e ciò mostra quanto il suo genio precorresse i nostri tempi non solo per quanto riguarda l'atteggiamento del suo pensiero profondo nei confronti di un'entità metafisica che ha ostacolato per lungo tempo i progressi della fisica, ma anche per l'introduzione di quei concetti matematici che hanno progressivamente condotto alla geometria riemanniana e al calcolo tensoriale i quali

costituiscono il presupposto della fisica del campo di ALBERTO EINSTEIN.

MAXWELL ha per primo tradotto in equazioni nel suo *Treatise* del 1873 la dottrina delle azioni di campo di FARADAY dei fenomeni elettrodinamici, utilizzando strumenti e metodi matematici che LAGRANGE, HAMILTON ed HELMHOLTZ avevano creati nella dinamica.

MAXWELL è stato condotto alla memorabile scoperta della natura elettromagnetica della luce ed ha identificato l'etere di FRESNEL con l'etere di FARADAY.

La sua teoria presuppone che il sistema di riferimento sia solidale con la Terra e che la sede del campo elettromagnetico sia l'etere oppure un mezzo in quiete nel sistema di riferimento.

HEAVISIDE ed HERTZ hanno molto contribuito a rendere intelligibili i principi generali della teoria di MAXWELL e in particolare si deve ad HERTZ la gloria di aver realizzato sperimentalmente le onde elettromagnetiche la cui esistenza era stata prevista dal MAXWELL attraverso le sue celebri equazioni.

L'intima connessione tra i fenomeni elettrici e i fenomeni luminosi condusse i fisici a riesaminare i problemi dell'ottica dei corpi in moto dal punto di vista maxwelliano e a cercare le basi di un'elettrodinamica dei corpi in moto.

Vale ancora il principio di relatività per i fenomeni elettrodinamici?

Prima di occuparci di ciò, è necessario richiamare il contenuto della teoria fenomenologica di MAXWELL.

PARTE I.

Le elettrodinamiche prerelativistiche.

1. L'elettrodinamica fenomenologica di Maxwell dei corpi in quiete. — Le equazioni di MAXWELL dell'elettrodinamica dei corpi in quiete si possono esprimere nella seguente forma integrale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B}_n d\sigma &= - \int \mathbf{E} ds \\ \int \mathbf{C}_n d\sigma &= \int \mathbf{H} ds. \end{aligned}$$

La prima equazione costituisce la legge di induzione di FARADAY; in essa figurano le due intensità \mathbf{E} e \mathbf{B} rispettivamente elettrica e magnetica.

La seconda equazione dicesi legge di concatenazione di AMPÈRE ed implica la densità di corrente totale \mathbf{C} e l'eccitazione magnetica \mathbf{H} .

MAXWELL ha introdotto accanto alla corrente di conduzione \mathbf{I} una corrente, che chiamava di spostamento, la cui densità è la derivata temporale dell'eccitazione elettrica \mathbf{D} . Noi qui la chiameremo corrente di eccitazione. Si ha dunque

$$\mathbf{C} = \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{I}.$$

Alle due equazioni di induzione e concatenazione debbono essere aggiunte le seguenti:

$$\oint \mathbf{B}_n d\sigma = 0$$

$$\oint \mathbf{D}_n d\sigma = e$$

che rispettivamente esprimono la chiusura delle linee di forza magnetica e la relazione globale fra le cariche elettriche contenute in una qualunque superficie chiusa σ e il flusso di eccitazione elettrica attraverso la stessa σ .

Infine, il comportamento macroscopico dei corpi in un campo elettromagnetico, viene descritto con tre costanti: la conducibilità σ , la costante dielettrica ϵ e la permeabilità magnetica μ . MAXWELL ha ammesso che nei conduttori la corrente di conduzione \mathbf{I} sia proporzionale all'intensità elettrica \mathbf{E} , nei dielettrici l'eccitazione elettrica \mathbf{D} sia proporzionale all'intensità elettrica e infine che l'intensità magnetica sia proporzionale all'eccitazione magnetica \mathbf{H} con che

$$\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Seguendo il sistema GIORGI nel quale si assume una grandezza elettrica come primitiva, ad es. la carica, accanto alle lunghezze, masse e durate, si è condotti ad attribuire al vuoto, l'etere della vecchia fisica, una costante dielettrica ϵ_0 e una permeabilità magnetica μ_0 .

Le equazioni che descrivono allora i fenomeni elettromagnetici nel vuoto si ottengono dalle precedenti ponendo

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

In un mezzo ponderabile, le tre leggi materiali non hanno affatto quel carattere di rigore che hanno le equazioni di induzione e di concatenazione.

Mentre queste ultime mostrano di valere anche nei campi elettromagnetici microscopici creati dalle particelle elettriche elementari e tale vitalità è dovuta ad una insigne proprietà di invarianza che sarà messa in luce nel seguito, le leggi materiali invece sono state e sono oggetto di ricerche intese a perfezionarne la struttura.

Per es. la relazione fra \mathbf{B} ed \mathbf{H} anche per i campi macroscopici è in generale lungi dall'essere una semplice proporzionalità; nei campi microscopici le leggi materiali non sono lineari. Esse sono state stabilite nelle ricerche di HEISENBERG, EULER e KOCKEL fondate sui principi della meccanica quantistica.

Voglio infine sottolineare che, seguendo G. MIE e A. SOMMERFELD, accetto l'interpretazione di grandezze dinamiche di \mathbf{E} e di \mathbf{B} e per questa ragione le ho chiamate intensità elettrica e magnetica, mentre chiamo \mathbf{D} ed \mathbf{H} rispettivamente eccitazione elettrica ed eccitazione magnetica, poichè queste grandezze descrivono lo stato provocato dalle sorgenti del campo.

Dunque, l'equazione di induzione lega fra loro le grandezze dinamiche e l'equazione di concatenazione pone un vincolo tra le eccitazioni.

Volendo passare dalle equazioni in forma integrale a quelle in forma differenziale basta effettuare un passaggio al limite tenendo presente che la superficie σ è immobile.

Si perviene così alle equazioni seguenti

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{B}} &= -\text{rot } \mathbf{E} \quad , \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{I} &= \text{rot } \mathbf{H} \quad , \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho \\ \mathbf{I} &= \sigma \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.\end{aligned}$$

Se si considera il campo elettromagnetico del vuoto, le equazioni rivelano il carattere ondoso del fenomeno e l'importanza eccezionale della grandezza $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ che misura la velocità di propagazione di tutte le onde elettromagnetiche e in particolare di quelle luminose.

Accanto all'importantissimo concetto di corrente di eccitazione, MAXWELL ha proposto il concetto di energia localizzata, intendendo con ciò che ogni porzione del campo, per quanto piccola, fosse sede di energia elettrica e magnetica.

Noi assumiamo quali densità di energia elettrica e magnetica rispettivamente

$$W_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} \quad W_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H}$$

e quindi come densità di energia totale

$$W = W_e + W_m$$

Mentre queste espressioni descrivono egregiamente i fenomeni nel vuoto, non altrettanto può dirsi che accada per la materia.

Inoltre la descrizione maxwelliana degli aspetti energetici del campo era incompleta.

HEAVISIDE e POYNTING nel 1884 (cinque anni dopo la morte di MAXWELL) hanno osservato che l'energia elettromagnetica non dev'essere considerata soltanto come localizzata, ma anche come un'entità che viene trasportata attraverso il campo alla stessa guisa di una corrente di fluido comprimibile.

Seguendo POYNTING, si è condotti ad assumere la grandezza

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$$

quale densità di corrente di energia e importa rilevare qui che alla grandezza scalare energia viene ad affiancarsi una grandezza vettoriale che esprime una corrente di quella entità fisica.

Il gioco di questa grandezza è subito visto, perchè essa permette di esprimere matematicamente il principio dell'energia.

In forma integrale, l'equazione dell'energia è

$$\frac{\partial}{\partial t} \int W d\tau + \oint \mathbf{S}_n d\sigma = - \oint \mathbf{I} \mathbf{E} d\tau,$$

dove W è la densità di energia totale e il secondo membro, nel caso di materia ponderabile, esprime il calore prodotto per effetto JOULE.

In forma differenziale l'equazione dell'energia assume l'aspetto

$$\dot{W} + \operatorname{div} \mathbf{S} = - \mathbf{I} \mathbf{E}.$$

È appena necessario rilevare l'analogia di questa equazione con l'equazione di continuità dell'idrodinamica, corrispondendo alle densità di materia e di quantità di moto (o di impulso) rispettivamente la densità di energia elettromagnetica e di corrente di energia.

MAXWELL ha anche proposto di descrivere le azioni meccaniche nei campi elettrostatici e magnetostatici mediante un tensore σ simmetrico di rango 2 che oggi chiamiamo il tensore degli sforzi maxwelliani. Seguendo HEAVISIDE, le componenti di σ sono date da

$$\sigma_{ik} = \mathbf{E}_i \mathbf{D}_k - \delta_{ik} W_e + \mathbf{B}_i \mathbf{H}_k - \delta_{ik} W_m, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

La divergenza di σ esprime la densità di forza ponderomotrice, cioè la forza unitaria di volume che agisce nel generico punto del campo.

MAXWELL ha dimostrato che nel campo si trasmettono delle

forze aventi carattere di tensione nella direzione delle linee di forze e carattere di pressione ortogonalmente a tali linee, in maniera simile a quanto accade all'interno di un corpo elastico sottoposto a deformazione. Con ciò furono confermate matematicamente le geniali previsioni di FARADAY riguardo alla struttura dei campi.

Dopo MAXWELL si è ammesso che il tensore σ fosse valido anche per i campi elettromagnetici variabili, ma così facendo si incontra subito una prima difficoltà.

Se supponiamo per semplicità che la costante dielettrica ϵ e la permeabilità μ siano non solo costanti, ma anche indipendenti dal posto, la densità di forza risulta dalla formula seguente

$$\mathbf{K} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{I} \wedge \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \frac{1}{c^2}.$$

Ne segue che nei punti del campo in cui sono nulle le densità di carica e di corrente si ha

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \frac{1}{c^2}.$$

Questa forza unitaria dovrebbe dunque agire sull'etere.

Tutte le ricerche sperimentali dei più eminenti fisici, quali HELMHOLTZ, HERTZ, WIEN, G. MIE, ecc. intese a scoprire gli effetti di questa forza sono fallite.

Difficoltà di altra natura si presentano quando si vogliono valutare gli sforzi maxwelliani all'interno della materia.

Qui basti accennare al tensore proposto da HERTZ

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_i \mathbf{D}_k + \mathbf{E}_k \mathbf{D}_i) - \delta_{ik} W_e + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_i \mathbf{H}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{H}_i) - \delta_{ik} W_m$$

il quale differisce dal tensore di MAXWELL-HEAVISIDE nei mezzi anisotropi.

Infine a MAXWELL si deve l'indicazione di due esperienze non realizzate da lui stesso che hanno esercitato un'influenza enorme sul progresso delle conoscenze nella fisica elettromagnetica. Nel suo *Treatise* MAXWELL prevede che un disco fortemente elettrizzato rotante agisca su di un ago magnetico posto in prossimità di esso.

Le esperienze a tale riguardo furono compiute negli anni dal 1876 al 1878 a Berlino nell'Istituto di fisica allora diretto da HELMHOLTZ, dal fisico americano ROWLAND e confermarono la previsione di MAXWELL. La legge quantitativa stabilita rigorosamente da ROWLAND è che l'azione magnetica dovuta ad una carica unitaria posta in un punto del corpo mobile avente la velocità v è quella stessa che si avrebbe da parte di una corrente di conduzione la cui densità fosse ρv .

Ed ancora lo stesso anno della morte, 1879, MAXWELL, meditando sulla natura elettromagnetica della luce, pensò che si dovesse poter mettere in evidenza il moto della Terra rispetto all'etere, supposto immobile, con un'esperienza ottica od elettromagnetica.

La velocità di propagazione della luce relativa alla Terra nella direzione e nel verso del moto della Terra stessa è diversa dall'analoga velocità nella stessa direzione e nel verso opposto oppure nella giacitura ortogonale, come risulta applicando la regola galileiana di addizione delle velocità.

MAXWELL prevedeva allora che da un'esperienza interferenziale emergesse la differenza fra le dette velocità.

La proposta di una siffatta esperienza è contenuta in una nota pubblicata poco dopo la morte di MAXWELL in « Proc. Roy. Soc. ».

L'esperienza fu realizzata la prima volta a Berlino nell'Istituto di Helmholtz dal fisico di origine americana ALBERTO MICHELSON nel 1880 e 1881 e fu ripetuta nel 1887 in America da MICHELSON e MORLEY e numerose volte in seguito con perfezione sempre crescente da eminenti fisici sperimentali. La realizzazione più raffinata che si conosca è quella di Joos fatta nel 1930 con un interferometro che trovasi nel Museo tedesco di Monaco.

È universalmente noto che il risultato dell'esperienza è negativo.

Non si riesce dunque a rivelare il moto della Terra rispetto all'etere immobile. Le cose vanno come se la Terra fosse in quiete nell'etere.

La circostanza nuova che rendeva eccezionalmente importante quest'esperienza in confronto di altre esperienze ottiche dei corpi in moto fatte nell'epoca della teoria elastica della luce è che questa volta si tratta di un effetto di secondo ordine. Il fenomeno implica cioè la seconda potenza di quel rapporto che dianzi ho indicato con β .

2. L'Elettrodinamica di Hertz dei corpi in moto. — Dopo aver esposto succintamente i caratteri salienti dell'opera maxwelliana torniamo alla questione che si è imposta alla nostra attenzione.

Il principio di relatività o invarianza delle leggi fisiche si può trasportare senz'altro ai fenomeni elettrodinamici?

Prima di iniziare questa indagine mi si consenta di premettere un'osservazione riguardo alla forma delle equazioni di MAXWELL.

Nel sistema di GIORGI un polo magnetico è omogeneo con una carica moltiplicata per una velocità. Nel sistema di GAUSS invece le due grandezze sono omogenee e quindi le equazioni del campo

in forma integrale debbono essere scritte così

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B}_n d\sigma = - \int \mathbf{E} ds$$

$$\frac{1}{c} \int \mathbf{C}_n d\sigma = \int \mathbf{H} ds.$$

L'introduzione della velocità della luce in queste equazioni è utile per le considerazioni che sto per fare

Aggiungo che nel sistema di GAUSS le costanti ϵ e μ sono numeri entrambi uguali ad 1.

Riguardo all'elettrodinamica dei corpi in moto si possono considerare quattro casi secondo che si fa muovere in un campo magnetico o in un campo elettrico un conduttore oppure un dielettrico. Si ha così il seguente quadro

Conduttore mobile	}	in campo magnetico (FARADAY) in campo elettrico (ROWLAND, EICHENWALD)
Dielettrico mobile	}	in campo magnetico (WILSON) in campo elettrico (RÖNTGEN, EICHENWALD).

La prima esperienza famosa è quella dell'induzione magnetoelettrica nei conduttori scoperta da FARADAY nel 1831. Abbiamo già accennato all'esperienza di ROWLAND.

Ora vogliamo ricordare che fra il 1885 e il 1888 RÖNTGEN ha messo in luce come anche una divergenza superficiale di intensità elettrica alla superficie di separazione di due mezzi dielettrici differenti possa dar luogo ad un effetto magnetico, quando uno dei dielettrici è in moto rispetto all'altro.

Mi si consenta qui di ricordare che HERTZ interpretava come densità di carica libera alla superficie di un dielettrico polarizzato la detta divergenza e analogamente come magnetismo libero la divergenza dell'eccitazione magnetica \mathbf{H} , mentre egli qualificava rispettivamente densità di carica vera e di magnetismo vero rispettivamente $\text{div } \mathbf{D}$ e $\text{div } \mathbf{B}$.

Secondo il nostro punto di vista solo le divergenze di \mathbf{D} e di \mathbf{H} sono densità di carica e di magnetismo, mentre non ha senso parlare di cariche libere e magnetismo libero.

Le esperienze di RÖNTGEN sono state fatte con maggior cura nel 1903 dal fisico russo EICHENWALD, il quale ha indagato ancora sull'effetto ROWLAND.

L'esperienza di WILSON è del 1904. Essa è l'esperienza duale di quella di RÖNTGEN.

Sia un condensatore cilindrico scarico tra le armature del quale

trovasi un dielettrico cilindrico cavo in un campo magnetico omogeneo diretto parallelamente all'asse del cilindro. Il fenomeno consiste in ciò che il condensatore si carica se si fa rotare il dielettrico.

Le esperienze originali di ROWLAND, RÖNTGEN, WILSON contemplano gli effetti dovuti al moto rotatorio di corpi conduttori o dielettrici, ma per fissare le idee su di un modello più facilmente accessibile alla speculazione teorica si può pensare di riferirsi a moti traslatori rettilinei uniformi.

Il primo tentativo di generalizzazione ai corpi in moto della teoria fenomenologica di MAXWELL è stato fatto da HERTZ.

Il criterio al quale egli si è ispirato è stato di mantenere il principio di relatività della dinamica di GALILEO-NEWTON e di supporre che l'etere fosse completamente trascinato dai corpi in analogia alla teoria ottica di STOKES che era però già stata abbandonata dai fisici, perchè in disaccordo con l'esperienza.

Le equazioni dell'elettrodinamica dei corpi in moto debbono essere invarianti rispetto alla trasformazione di GALILEO.

Ciò significa che se S ed S' sono due sistemi di riferimento inerziali l'uno solidale col laboratorio e l'altro col corpo che è sede del campo, se σ è una superficie solidale con S' e quindi mobile rispetto ad S con la velocità di S' rispetto ad S , valgono le equazioni di MAXWELL nella forma integrale

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B}_n d\sigma = - \int \mathbf{E} ds$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{D}_n d\sigma = \int \mathbf{H} ds$$

con la variante cui poco fa ho alluso e con la circostanza essenziale che questa volta la derivazione temporale non è senz'altro invertibile con l'integrazione.

Se si passa alla forma differenziale, si trovano le equazioni

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} + \text{rot} \left(\mathbf{B} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c} \right) = - \text{rot } \mathbf{E}$$

$$\frac{1}{c} (\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{I}) + \rho \frac{\mathbf{v}}{c} + \text{rot} \left(\mathbf{D} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c} \right) = \text{rot } \mathbf{H}$$

e conviene osservare che il passaggio dalla forma integrale alla forma differenziale non utilizza l'ipotesi che il corpo sia in moto non accelerato rispetto ad S e che quindi le equazioni di HERTZ sono invarianti non solo di fronte ai moti traslatori non accelerati, ma di fronte a movimenti qualunque.

Come si vede, il moto del corpo dà luogo ad un termine nel-

l'equazione dell'induzione, il quale dovrebbe render conto dell'esperienza di WILSON e a due termini nuovi nell'equazione di concantenazione.

Il prodotto $\mathbf{B} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c}$, oppure $\mathbf{B} \wedge \mathbf{v}$ nel nostro sistema, dev'essere considerato come un'intensità elettrica addizionale, $\rho \frac{\mathbf{v}}{c}$ o $\rho \mathbf{v}$ è la densità di corrente di ROWLAND o di convezione e infine

$$\text{rot} \left(\mathbf{D} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \quad \text{o} \quad \text{rot} (\mathbf{D} \wedge \mathbf{v})$$

è la densità di corrente di RÖNTGEN. Come si vede, gli effetti dovuti al moto dei corpi sono del primo ordine in β . Ora, confrontando questi termini dedotti dalla teoria di HERTZ con i risultati delle esperienze di RÖNTGEN, si trova che c'è disaccordo, perchè l'effetto osservato è in armonia con l'espressione $(\epsilon - 1) \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{E}$ e non con $\frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}$ (nel nostro sistema l'effetto è determinato da $(\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} \wedge \mathbf{v}$ e non da $\epsilon \mathbf{E} \wedge \mathbf{v}$).

Una circostanza analoga si presenta riguardo all'esperienza di WILSON che però, come abbiamo detto, è posteriore all'epoca di HERTZ.

Si può dire che l'esperienza mostra che l'etere non è completamente trascinato dalla materia, ma solo nella misura in cui questa è più dielettrica dell'etere (cioè del vuoto).

Nessun tentativo HERTZ ha fatto per spiegare l'esito negativo dell'esperienza di MICHELSON.

3. Le teorie di Lorentz del 1895 e del 1904 e la dinamica dell'elettrone. — Fra il 1892 e il 1895 il fisico olandese LORENTZ ha costruito una nuova teoria elettrodinamica ponendosi da un punto di vista per così dire opposto a quello di HERTZ.

Il passaggio dalla teoria di MAXWELL e di HERTZ a quella di LORENTZ è analogo al passaggio dalla dinamica di GALILEO a quella di NEWTON.

Due sono le caratteristiche della grandiosa costruzione di LORENTZ.

L'una è il carattere di sistema universale di riferimento conferito all'etere supposto immobile, l'altra è l'ipotesi della struttura atomistica dell'elettricità congiunta a quella della validità delle equazioni di MAXWELL per la determinazione dei campi elettromagnetici microscopici delle particelle elettriche elementari che

furono chiamate elettroni anche prima che questo sostantivo assumesse il significato specifico che ha oggi.

I campi elettromagnetici dei corpi si deducono dalla teoria di LORENTZ con procedimenti di media eseguiti sulle grandezze microscopiche.

Nella teoria di LORENTZ è parola di sole correnti di convezione generate dalle cariche in moto.

Le equazioni di LORENTZ sono

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}} &= -\text{rot } \mathbf{E} & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \dot{\mathbf{D}} + \rho \mathbf{v} &= \text{rot } \mathbf{H} & \text{div } \mathbf{D} &= \rho \end{aligned}$$

dove sussiste fra le grandezze \mathbf{D} ed \mathbf{E} , \mathbf{B} ed \mathbf{H} del campo dell'elettrone una rigorosa proporzionalità, espressa da $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

LORENTZ ha ancora proposto una legge che porta il suo nome per la valutazione delle azioni meccaniche del campo la quale costituisce un postulato da aggiungere alle equazioni del campo.

La densità di forza che il campo esercita nel generico punto sede di carica è

$$\mathbf{K} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).$$

Questa legge permette di superare la difficoltà della teoria di MAXWELL cui abbiamo accennato quando abbiamo rilevato che la estensione del tensore degli sforzi maxwelliani ai campi variabili conduce ad una forza che dovrebbe agire sull'etere.

Il tensore di MAXWELL trasportato nella teoria di LORENTZ dà luogo ad una descrizione corretta delle forze ponderomotrici.

Inoltre la teoria di LORENTZ rende conto di tutti gli effetti di prim'ordine sia ottici che elettrodinamici dovuti al movimento dei corpi ed ha inoltre permesso di scoprire nuovi fenomeni di importanza fondamentale, quale ad es. l'effetto ZEEMAN.

Il grande merito di LORENTZ è di aver posto nettamente nella sua celebre memoria del 1895 il problema di decidere se con esperienze ottiche o elettromagnetiche si potesse rivelare il moto orbitale terrestre.

Il maggiore sforzo intellettuale compiuto da LORENTZ è stato fatto da lui per spiegare l'esito negativo dell'esperienza di MICHELSON. Essendo questa esperienza di 2° ordine, essa sfuggiva alla sua teoria, ma LORENTZ aveva introdotto fin dal 1892 una famosa ipotesi, formulata anche indipendentemente da lui dal fisico irlandese FITZ GERALD, in virtù della quale i corpi in moto rispetto all'etere subiscono una contrazione longitudinale, cioè nella direzione del moto.

La contrazione lorentziana era presentata quale effetto di azioni

elettriche in seno alla materia ed avrebbe dovuto dar luogo a fenomeni di doppia rifrazione che invece non furono rivelati dalle esperienze di Lord RAYLEIGH (1902), di BRACE (1904) e di RANKINE (1908).

Era lecito quindi presumere che l'ipotesi della contrazione fosse solo un artificio per spiegare l'esperienza di MICHELSON.

Intanto verso la fine del secolo scorso le celebri esperienze sui raggi catodici misero in evidenza l'esistenza della carica elementare che oggi dicesi elettrone, la scoperta di RÖNTGEN dei raggi X e quella successiva della radioattività davano nuovo impulso alla teoria di LORENTZ che fu chiamata teoria degli elettroni e si imponeva fra l'altro un'indagine che permettesse di comprendere e di valutare il comportamento dell'elettrone in moto in relazione col campo elettromagnetico da esso creato.

È a proposito di questo importante problema dinamico ed elettrodinamico che si manifestano i germi fecondi di nuove vedute destinate a condurre ai nuovi principi matematici della filosofia naturale.

LORENTZ, POINCARÉ, ABRAHAM, ecc. hanno dato contributi notevoli alla nascente dinamica dell'elettrone. MAXWELL aveva previsto nel suo *Treatise* che un corpo che assorbe un raggio luminoso subisce una pressione nella direzione del raggio e alla stessa previsione era stato condotto il BARTOLI attraverso considerazioni termodinamiche. L'intensità della pressione è uguale alla densità di corrente di energia S divisa per c . La previsione fu confermata sperimentalmente molto più tardi dal fisico russo LEBEDEV nel 1901, da NICHOLS e HULL nel 1903 e da altri ancora. Di qua combinando il principio meccanico della conservazione dell'impulso e la natura elettromagnetica della luce, POINCARÉ fu condotto nel 1900 ad introdurre un nuovo concetto fondamentale del campo elettromagnetico: la densità di impulso definita da

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}.$$

Questo concetto ha permesso ad ABRAHAM di dimostrare che nei processi di emissione e di assorbimento delle radiazioni elettromagnetiche continua a sussistere il principio della conservazione dell'impulso, quando si tenga debito conto sia degli impulsi meccanici, sia degli impulsi elettromagnetici.

Inoltre lo stesso concetto ha condotto ad una conseguenza della più alta importanza. Immaginiamo un corpo elettrizzato in movimento. Il moto genera un campo elettromagnetico e quindi corrente di energia ed impulso: se il sistema mobile portatore delle

cariche soddisfa a particolari condizioni di simmetria, per es. è una sfera, allora le due grandezze in discorso hanno la stessa direzione della velocità del corpo. Qui interviene per la prima volta il concetto di inerzia dell'energia elettromagnetica, perché l'impulso totale del campo si risolve in definitiva in una massa addizionale del sistema in moto.

È istruttivo paragonare questa circostanza a quella analoga che si incontra nella teoria del moto di un corpo rigido in seno ad un fluido, magistralmente svolta dal KIRCHHOFF nelle sue celebri *Vorlesungen über Mechanik*, « Neunzehnte Vorlesung ». KIRCHHOFF ha dimostrato che l'azione complessiva del fluido si riassume in un aumento della massa del corpo e nel caso della sfera nella misura della metà della massa del fluido spostato. Se si tratta di un sistema macroscopico la massa addizionale che nasce dal campo elettromagnetico è trascurabile per tutte le cariche che sono realizzabili sperimentalmente, ma se si considera l'elettrone come una sfera di raggio dell'ordine di grandezza di 10^{-13} cm non è difficile stabilire che tale massa è dello stesso ordine di grandezza della massa osservabile attraverso le classiche esperienze di J. J. THOMSON. Fu così ammesso che l'intera massa dell'elettrone fosse di origine elettromagnetica.

L'ipotesi fu sottoposta ad una profonda analisi da ABRAHAM (1903). Il risultato dell'indagine fu che l'impulso elettromagnetico è proporzionale alla velocità solo per piccole velocità in confronto a c e che la deviazione dalla legge di proporzionalità diviene tanto più sensibile quanto maggiore è la velocità. Nel corso della ricerca ABRAHAM ha fatto distinzione fra massa trasversale e massa longitudinale dell'elettrone. La teoria di ABRAHAM stimolò le ricerche sperimentali e le esperienze più accurate mostrarono che effettivamente non c'era accordo con la realtà fisica. Si era in presenza di un nuovo effetto di 2° ordine: la variabilità della massa dell'elettrone in funzione della velocità. In opposizione all'ipotesi della rigidità dell'elettrone adottata da ABRAHAM, LORENTZ applicò invece la sua ipotesi della contrazione e riuscì a trovare la legge esatta di dipendenza della massa dell'elettrone dalla velocità. Essa è espressa dalla seguente classica formula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Se poi si esprime la massa dell'elettrone in funzione della sua energia elettrostatica si trova la formula

$$m = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2}.$$

A questa conclusione si collega un risultato del fisico austriaco HASENHÖRL il quale si propose di generalizzare la teoria di PLANCK della radiazione in una cavità in quiete al caso di una cavità in moto. Mentre quando la cavità è in quiete i raggi hanno tutti la stessa intensità, nel caso della cavità in moto sono più intensi i raggi che formano un angolo acuto con la direzione orientata del moto e si ha così una componente dell'impulso in tale direzione che cresce con la velocità anche più rapidamente del modo espresso dalla legge di variabilità della massa di ABRAHAM.

Infine da considerazioni analoghe alle precedenti è nata l'esperienza di TROUTON e NOBLE che è un terzo effetto di 2° ordine. Ed ecco come.

Non è detto che l'impulso debba avere sempre la stessa direzione della velocità. Anche quando il moto è puramente traslatorio, il momento cinetico elettromagnetico del campo generato dalle cariche determinerà un momento cinetico meccanico e quindi una coppia agente sul sistema conduttore in moto.

Così era presumibile che un condensatore carico, sospeso in guisa da rotare liberamente, dovesse assumere un'orientazione particolare relativa alla direzione del moto orbitale terrestre, precisamente quella nella quale il momento cinetico è nullo. Questa conclusione è una conseguenza necessaria dei principi della dinamica newtoniana. Eppure nonostante che fossero fatte esperienze sempre più accurate per la rivelazione dell'effetto previsto il risultato è stato sempre negativo come è accaduto nell'esperienza di MICHELSON.

PARTE II.

L'elettrodinamica di Einstein-Minkowski.

1. I principî di Einstein. — Con la seconda teoria di LORENTZ del 1904 la situazione era la seguente.

Le esperienze di 2° ordine, quali quella di MICHELSON, quella della variabilità della massa dell'elettrone, quella di TROUTON e NOBLE erano in disaccordo con l'ipotesi dell'etere immobile; ma si potevano spiegare con l'ipotesi della contrazione lorentziana.

LORENTZ riconosceva inoltre l'esistenza di una trasformazione che applicata alle equazioni del campo dell'elettrone le muta nella stessa forma.

A questa scoperta LORENTZ era pervenuto per gradi e ad essa hanno concorso anche LARMOR e POINCARÉ. Tutte le esperienze conosciute sia del 1° ordine che del 2° ordine erano d'accordo con la presunzione che i fenomeni fisici di qualunque natura essi fossero dovessero impedire di rivelare il moto orbitale della Terra rispetto all'etere. Già nel 1901 POINCARÉ scriveva che:

« Cette étrange propriété semblerait un véritable "coup de pouce", donné par la nature pour éviter que le mouvement absolu de la Terre puisse être révélé par les phénomènes optiques. Cela ne saurait me satisfaire et je crois devoir dire ici non sentiment: je regarde comme très probable que les phénomènes optiques ne dependent pas des mouvements relatifs des corps matériels en présence, sources lumineuses ou appareils optiques et cela non pas aux quantités près de l'ordre du carré ou du cube de l'aberration, mais rigoureusement. A mesure que les expériences deviendront plus exactes, ce principe sera vérifié avec plus de précision ».

Egli inoltre in una nota dei « Comptes Rendus » del 1905 e in una memoria sulla dinamica dell'elettrone presentata al « Circolo matematico di Palermo » nello stesso anno 1905 scrive che « sembra che l'impossibilità di mettere in evidenza sperimentalmente il moto assoluto della Terra sia una legge generale della natura ».

POINCARÉ aggiunge: « noi siamo naturalmente portati ad ammettere questa legge che chiameremo il postulato di relatività e ad ammetterla senza restrizione. Sia che questo postulato, fin qui d'accordo con l'esperienza, debba essere confermato o infirmato più tardi da misure più precise, è in ogni caso interessante di vedere quali possono essere le conseguenze ».

ALBERTO EINSTEIN ha dato per primo nella famosa memoria *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* del 1905 una soluzione del problema dell'elettrodinamica dei corpi in moto che per i principî cui è informata si è presentata di carattere imponente e si è subito imposta all'attenzione universale.

Lo stesso LORENTZ ha accettato le idee di EINSTEIN.

EINSTEIN eleva al rango di principio il fatto accertato al massimo con esperienze di 2° ordine che con tali esperienze non si riesce a rivelare il moto della Terra rispetto all'etere.

Questa congettura nasce indipendentemente dalla scoperta fatta da LORENTZ che le equazioni del campo dell'elettrone sono invarianti per una certa trasformazione detta di LORENTZ da POINCARÉ.

EINSTEIN non indaga se il moto orbitale della Terra possa essere rivelato con esperienze di ordine superiore e ammette invece per principio l'impossibilità di una tale rivelazione.

Dopo aver riconosciuto il comportamento del parametro c nelle equazioni del campo elettromagnetico dell'elettrone in virtù del quale nel passaggio da un sistema S ad un sistema S' che differisce da S per un moto non accelerato, tutto va come se c avesse carattere di invarianza, EINSTEIN postula appunto questa invarianza e dimostra che questo postulato, noto come « principio della costanza della velocità della luce nel vuoto », è compatibile col « prin-

cipio di relatività » il quale si può esprimere in una delle due forme seguenti :

a) è impossibile rivelare il moto di un sistema inerziale con esperienze fisiche di qualunque natura eseguite nel sistema,

b) le leggi della fisica sono le stesse per due qualunque sistemi di riferimento inerziali.

Basta appena riflettere sul principio della costanza della velocità della luce per comprendere quali modificazioni profonde impongano i principi relativistici alle abituali superficiali concezioni dello spazio e del tempo. È chiaro che vengono cambiate le nozioni elementari riguardanti le misure delle lunghezze e delle durate: queste divengono relative al sistema di riferimento.

Come conseguenza necessaria dei due principi si trova che il passaggio dalle coordinate spazio-temporali di uno dei due sistemi a quelle dell'altro si esprime proprio con la trasformazione che aveva scoperta LORENTZ nel 1904 e che lo stesso anno era stata ritrovata anche da POINCARÉ.

Ma mentre nell'opera di LORENTZ e di POINCARÉ la trasformazione di LORENTZ appariva solo con un'entità matematica valida per la costruzione di una dinamica dell'elettrone, tale trasformazione assume nell'opera di EINSTEIN un significato fisico importantissimo.

Essa è lo strumento per mezzo del quale si esprime l'invarianza delle leggi della fisica nel passaggio dall'uno all'altro dei due sistemi inerziali.

Come si vede, i principi di EINSTEIN invertono l'ordine delle nozioni fondamentali della meccanica di GALILEO-NEWTON. Mentre qui si assumono le lunghezze e le durate quali grandezze primitive, EINSTEIN, subordina la misura di queste alla velocità della luce. Il tempo non è più una grandezza assoluta, suscettibile quindi di una determinazione unica per tutti i possibili osservatori (o sistemi di riferimento) in moto l'uno rispetto all'altro, ma è invece una grandezza relativa suscettibile di determinazioni multiple.

Il principio di relatività permette di raggiungere un assetto di mirabile unità nella descrizione dei fenomeni del campo elettromagnetico, senza fare appello a speciali ipotesi, come nella teoria di LORENTZ o nelle teorie precedenti, compresa quella di MAXWELL. La contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi sono necessarie conseguenze dei principi relativistici.

Così EINSTEIN per primo ha descritto correttamente la perfetta reciprocità del comportamento di un magnete e di un conduttore in moto reciproco nel fenomeno dell'induzione magnetoelettrica di FARADAY.

EINSTEIN ha ritrovato la legge di dipendenza della massa dell'elettrone dalla velocità che LORENTZ aveva stabilita attraverso l'ipotesi della contrazione. Tale legge esprime la variabilità della massa di qualunque particella elementare.

Questo risultato è legato ad un principio importantissimo che EINSTEIN ha stabilito in un altro lavoro pubblicato nel 1905 il quale è noto come principio dell'inerzia dell'energia.

Non solo è inerte l'energia elettromagnetica come fu stabilito dalla famosa ricerca di HASENÖHRL, ma è inerte qualunque forma di energia. Questo fondamentale risultato è la base dell'odierna fisica nucleare.

Dal principio di relatività segue subito la legge di forza di LORENTZ in prima approssimazione, mentre la legge rigorosa di forza ponderomotrice mette in rilievo dei termini di 2° ordine che permettono di dare un assetto rigoroso alla dinamica dell'elettrone.

Non potendo associare un etere ad ogni sistema inerziale, ne segue che siamo costretti ad abolire questo concetto.

In natura non ci sono che corpi che si muovono l'uno rispetto all'altro e campi elettromagnetici nel vuoto che trovano il necessario sostegno nella materia ponderabile. Ogni corpo esente da azioni esterne, per es. gravitazionali, può essere assunto quale sistema di riferimento in quiete « ruhende System », un altro corpo che si muove rispetto al primo di moto non accelerato si può assumere come sistema di riferimento mobile « bewegte System » e il passaggio dall'uno all'altro si effettua per il tramite della trasformazione di LORENTZ, di cui la trasformazione di GALILEO è caso limite.

2. L'elettrodinamica del vuoto di Minkowski. — In tre lavori importanti del 1907 e 1908, HERMANN MINKOWSKI ha introdotto un'immagine matematica notevolissima la quale ha permesso di costruire su nuove basi l'intera elettrodinamica.

Ad ogni sistema di valori delle coordinate cartesiane ortogonali x, y, z e della coordinata temporale t di un sistema di riferimento inerziale S si può far corrispondere un punto di uno spazio a quattro dimensioni che è stato chiamato spazio-tempo o cronotopo. Ed è conveniente, più precisamente definire una quaterna di coordinate

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

tali che

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict$$

essendo i l'unità immaginaria e c la velocità della luce.

Se allora si considera un altro sistema inerziale S' con le coor-

dinate $x_1' = x'$, $x_2' = y'$, $x_3' = z'$, $x_4' = ict'$ la trasformazione generica di LORENTZ che fa passare dall'uno all'altro dei due sistemi inerziali S ed S' non è altro che una trasformazione ortogonale nel cronotopo.

Si può allora costruire una geometria euclidea nel cronotopo muovendo dall'espressione

$$ds^2 = \sum dx_i^2.$$

del quadrato dell'elemento lineare.

Vorrei ricordare a questo punto quanto sia stato grande il progresso nella geometria analitica cartesiana quando sono stati introdotti gli elementi immaginari sullo stesso piede degli elementi reali.

Ognuno sa quale ufficio essenziale abbiano il cerchio assoluto dello spazio metrico euclideo e nel piano la coppia dei punti ciclici. Noi diciamo che una qualunque retta isotropa del piano è ortogonale a se stessa e ciò mentre sembra che urti il buon senso superficiale non urta affatto la ragione.

Nel cronotopo di MINKOWSKI si lascia sviluppare il calcolo vettoriale e più generalmente il calcolo tensoriale e questi strumenti analitici si possono utilizzare per dare espressione quadrimensionale all'elettrodinamica nel vuoto e in un qualunque corpo ponderabile.

I presupposti dell'elettrodinamica di MINKOWSKI del vuoto sono i seguenti :

Con i vettori $c\mathbf{B}$ e $-i\mathbf{E}$ costruiamo un tensore antisimmetrico F di cui le componenti spaziali F_{23} , F_{31} , F_{12} sono le componenti di $c\mathbf{B}$ e le componenti spazio-temporali F_{14} , F_{24} , F_{34} sono le componenti di $-i\mathbf{E}$.

È questo il tensore dinamico del campo che, come si vede è formato con \mathbf{E} e \mathbf{B} : ecco la ragione profonda per cui all'intensità elettrica \mathbf{E} va associata la grandezza \mathbf{B} e non \mathbf{H} .

Con i vettori \mathbf{H} e $ic\mathbf{D}$ costruiamo analogamente il tensore di eccitazione f .

Infine con la densità di corrente di convezione $\rho\mathbf{v}$ e con $ic\rho$ costruiamo la densità di corrente cronotopica Γ .

Ciò posto, MINKOWSKI ha dimostrato che le equazioni di MAXWELL del vuoto assumono la forma seguente

$$\text{rot } F = 0, \quad \text{div } f = \Gamma.$$

Sotto questo aspetto esse ricordano le equazioni del campo elettrostatico.

I tensori antisimmetrici F ed f sono legati fra loro dalla sem-

plice relazione

$$f = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} F.$$

Qui si osservi che sotto certi riguardi si può svolgere la teoria in analogia al campo elettrostatico. Così mi limito ad enunciare il teorema. Se il rotore di un tensore antisimmetrico è nullo, esiste un vettore il cui rotore è il tensore dato. Si deve riflettere che nel cronotopo l'operazione di divergenza riduce di un'unità il rango del tensore, mentre il rotore eleva di un'unità il rango. Pertanto il rot F è un tensore di rango 3, ma solo quattro componenti di esso sono in generale differenti tra loro.

Se allora si indica con $c\Omega$ un vettore tale che

$$F = \text{rot}(c\Omega),$$

è facile mostrare che Ω deve soddisfare ad un'equazione di POISSON quadridimensionale. Ω è il potenziale vettore del campo elettromagnetico e quando il campo fosse giudicato da uno degli infiniti possibili sistemi inerziali si spezzerebbe nei due potenziali scalare e vettore che MAXWELL e LORENTZ avevano considerati nelle loro teorie.

Io non posso addentrarmi nella teoria di MINKOWSKI e solo voglio far vedere come il principio dell'energia e il principio dell'impulso, cioè la legge di dipendenza delle forze ponderomotrici dalle grandezze del campo si condensano in una terza equazione tensoriale.

Se si moltiplica scalarmente il tensore F per la divergenza del tensore $\frac{f}{c}$, si trova un tensore T tale che

$$\frac{1}{c} F \text{div} f = \text{div} T$$

ovvero per la seconda equazione di MAXWELL

$$\frac{1}{c} \Gamma F = \text{div} T.$$

Ora il primo membro di questa equazione è proprio la densità cronotopica di forza K e si ha così

$$K = \text{div} T.$$

Ecco la terza equazione di MINKOWSKI.

T è il tensore energetico; esso è simmetrico ed è costituito nel

modo che risulta dalla matrice seguente

$$T \equiv \begin{pmatrix} \sigma & -icg \\ -icg & W \end{pmatrix}$$

essendo g la densità di impulso di POINCARÉ-ABRAHAM.

Sarebbe interessantissimo approfondire questa terza equazione di MINKOWSKI e mostrare come di qua scaturiscono i principi della dinamica relativistica dell'elettrone che supera quella di LORENTZ, perchè costituisce il punto di partenza di una dinamica relativistica più generale, la dinamica di EINSTEIN, applicabile specialmente alle particelle elementari veloci, non necessariamente elettroni, di cui la dinamica classica di GALILEO-NEWTON è un caso limite.

Voglio solo richiamare l'attenzione sulla circostanza che il principio di relatività unendo i principi dell'energia e dell'impulso ha permesso di interpretare il tensore degli sforzi maxwelliani come una corrente di impulso, così come dall'energia localizzata si è passati con POYNTING alla corrente di energia, dall'impulso elettromagnetico localizzato di POINCARÉ ed ABRAHAM si è passati attraverso il principio di relatività alla corrente di impulso che è il tensore degli sforzi. Se, seguendo PLANCK, si generalizza questa immagine a qualunque forma di energia si perviene ad una formulazione più generale del principio dell'inerzia dell'energia in quanto EINSTEIN esprime un fatto globale e PLANCK un fatto locale.

3. L'elettrodinamica relativistica fenomenologica. — Se si riflette che il metodo usato da LORENTZ nella sua teoria degli elettroni per assurgere alla descrizione dei fenomeni macroscopici attraverso processi statistici può essere applicato evidentemente anche alla teoria relativistica dell'elettrone si comprende come si possa trattare ogni problema elettrodinamico sulla base dei principi posti da MINKOWSKI.

Tuttavia la mancanza di sicure conoscenze intorno alla struttura della materia ha condotto MINKOWSKI a domandarsi che cosa il principio di relatività permettesse di stabilire riguardo ai fenomeni macroscopici nei corpi in moto, quando si ammette che i fenomeni per i corpi in quiete siano dati dall'esperienza.

Per es. è nota la legge di OHM che stabilisce la relazione fra la densità di corrente di conduzione e l'intensità elettrica del campo in un qualunque conduttore in quiete. Che diventa la legge di OHM quando il conduttore è in moto?

La risposta che MINKOWSKI ha data al problema generale è soddisfacente e permette di giustificare le classiche esperienze di RÖNTGEN-EICHENWALD, di WILSON che determinarono il rigetto della teoria fenomenologica di HERTZ.

Ma io non insisto su ciò e mi propongo invece di studiare il problema fondamentale delle forze ponderomotrici nel campo elettromagnetico in corpi in quiete o in moto.

Il problema già nell'elettrodinamica fenomenologica di MAXWELL non aveva trovato una soluzione soddisfacente e si può dire che anche nell'elettrodinamica fenomenologica di MINKOWSKI non è stato risolto.

Io mi propongo qui di indicare le proposte fatte da vari Autori dal 1907 al 1950.

Cominciamo intanto a definire il tensore energetico per un corpo in quiete.

La densità di energia W , la densità di corrente di energia S , la densità di impulso g e la densità di corrente di impulso σ (tensore degli sforzi maxwelliani) costituiscono un tensore nel modo che segue

$$T_{ik} = \sigma_{ik} (i = 1, 2, 3); \quad (T_{14}, T_{24}, T_{34}) = -icg$$

$$(T_{41}, T_{42}, T_{43}) = -\frac{i}{c}S, \quad T_{44} = W$$

$$\left\| \begin{array}{cccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & -icg_x \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & -icg_y \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & -icg_z \\ -\frac{i}{c}S_x & -\frac{i}{c}S_y & -\frac{i}{c}S_z & W \end{array} \right\|.$$

Lasciamo per il momento indecisa una eventuale proprietà di simmetria di questo tensore.

Per quanto riguarda i corpi in quiete, tutti gli Autori sono d'accordo nell'accettare per W e per S le espressioni

$$W = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H}), \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}.$$

Già ho detto quali tensori degli sforzi maxwelliani siano stati proposti da MAXWELL-HEAVISIDE e da HERTZ.

Anche per la densità di impulso sono possibili due posizioni. Si può porre

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{B}$$

da cui si deduce, per i corpi omogenei isotropi

$$\mathbf{g} = \epsilon_\mu \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\epsilon_\mu}{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{S}$$

e si può porre invece

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}.$$

In corrispondenza alle alternative indicate riguardo alla scelta di σ e di \mathbf{g} si sono discusse le seguenti proposte:

1. **ensore cronotopico di MINKOWSKI:** MINKOWSKI accetta il σ di MAXWELL-HEAVISIDE e $\mathbf{g} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{B}$. In tal modo il tensore T è asimmetrico e ciò dà luogo a conseguenze che non sono accettate.

2. **Tensore cronotopico di ABRAHAM (1909).** ABRAHAM accetta il σ di HERTZ e la stessa espressione di \mathbf{g} del vuoto.

3. EINSTEIN e LAUB hanno fatto una terza proposta che richiederebbe un ampio commento e che quindi non possiamo discutere qui.

4. Nel 1949, L. KNEISSLER del Politecnico di Vienna ha esposto un nuovo punto di vista riguardo al problema delle forze ponderomotrici limitandosi ai campi statici. Il tensore degli sforzi proposto da KNEISSLER è diverso da quello che si dedurrebbe dal tensore di MAXWELL-HEAVISIDE o da quello di HERTZ) considerando soltanto campi statici.

Il tensore di KNEISSLER è stato oggetto di ulteriori sviluppi da parte di SOMMERFELD in collaborazione con F. BOPP e con E. RAMBERG (1950).

Seguendo SOMMERFELD, il tensore magnetico degli sforzi ha la forma

$$\sigma_{ik}^{(m)} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_i \mathbf{B}_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathbf{B}^2).$$

Se si calcola la divergenza di questo tensore si ottiene la seguente espressione per la densità di forza magnetostatica

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}$$

mentre altre espressioni della stessa grandezza quali

$$\mathbf{K} = \text{div } \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{B} \wedge \mathbf{H} + \text{div } \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B} = \mu \text{div } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}$$

sembra debbano essere respinte.

Quando fosse trovato il tensore del campo elettromagnetico più generale per i corpi in quiete l'applicazione del principio di re-

latività condurrebbe a caratterizzare il tensore energetico per i corpi in moto.

Mi propongo di ritornare su questo importante problema per discutere ampiamente le proposte precedenti ed una mia idea che si ispira ai lavori di ABRAHAM e di KNEISSLER.

BIBLIOGRAFIA

1. M. VON LAUE, *Das Relativitätsprinzip*, Leipzig, 1911; 3. Aufl. 1919. 1 Band, *Das Relativitätsprinzip der Lorentz-Transformation*; 4. Aufl. 1921, Braunschweig, Vieweg.
 2. M. BORN, *Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen*, Berlin, Springer, 1920.
 3. A. SOMMERFELD, *Vorlesungen über theoretische Physik*, Bd. III. Elektrodynamik, Wiesbaden, Dieterich, 1948.
 4. A. SOMMERFELD, und. F. BOPP, *Zum Problem der Maxwell'schen Spannungen*, « Ann. der Phys. », Bd. 8, 1950.
 5. H. THIRRING, *Die Idee der Relativitätstheorie*, « Dritte Aufl. », Wien, Springer, 1948.
 6. L. KNEISSLER, *Die Maxwell'sche Theorie in veränderter Formulierung*, Wien, Springer, 1949.
-