Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

Sistemi indeterminati impossibili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.2, p. 113–117.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_2_113_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Sistemi indeterminati impossibili.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

Sunto. - *Si dimostra l'impossibilità in numeri reali concordi di sistemi indeterminati del tipo*

$$x_1^k + \dots + x_n^k = y_1^k + \dots + y_n^k, \quad (k = m, m+1, \dots, m+n-1).$$

Recentemente B. SEGRE [1] e L. GATTESCHI e L. A. ROSATI [2] hanno dimostrato che il sistema

$$x_1^k + x_2^k = y_1^k + y_2^k = z_1^k + z_2^k, \qquad (k = 2, 3),$$

è impossibile rispettivamente in numeri razionali ed in numeri reali, se non si tien conto delle soluzioni banali.

In più gli ultimi Autori hanno provato che il sistema

$$x_1^k + x_2^k = y_1^k + y_2^k, \qquad (k = 2, 3), \tag{1}$$

escluse le soluzioni banali, è impossibile nel campo reale.

Ora noi qui consideriamo sistemi del tipo

$$x_1^k + \dots + x_n^k = y_1^k + \dots + y_n^k, \quad (k = m, m+1, \dots, m+n-1), \tag{2}$$

e dimostriamo che, per alcuni valori di m ed n, essi sono impossibili, per valori reali concordi delle incognite, se si prescinde dalle soluzioni banali. È da notarsi la semplicità delle dimostrazioni dei risultati qui ottenuti.

1. Per $m = 2$, $n = 2$, (2) si riduce ad (1).

Se

$$x_i = a_i, \qquad y_i = b_i, \qquad (i = 1, 2),$$

fosse una soluzione di (1) con a_i, b_i reali e di segni uguali, che senza ledere la generalità potrebbero ritenersi positivi, perchè se a_i, b_i, fossero tutti negativi basterebbe cambiarli di segno, potrebbero tali a_i, b_i, considerarsi radici rispettivamente delle due equazioni

$$X^2 + A_1 X + A_2 = 0, \qquad Y^2 + B_1 Y + B_2 = 0.$$

(1) Cfr. B. SEGRE, *Alcune questioni diofantee*, « Boll. dell'Unione Mat. Ital. ». Serie III, Anno V, (1950), n. 1, pp. 33-43.

(2) Cfr. L. GATTESCHI e L. A. ROSATI, *Risposta ad una questione proposta da A. Moessner*, Idem, pp. 43-48.

Posto

$$S_k = a_1^k + a_2^k, \qquad T_k = b_1^k + b_2^k$$

dalle formule di GIRARD–NEWTON

$$S_1 + A_1 = 0, \qquad S_2 + S_1A_1 + 2A_2 = 0, \qquad S_3 + S_2A_1 + S_1A_2 = 0,$$

si avrebbe

$$S_1 = -A_1, \qquad S_2 = A_1^2 - 2A_2, \qquad S_3 = -A_1^3 + 3A_1A_2$$

ed analogamente

$$T_1 = -B_1, \qquad T_2 = B_1^2 - 2B_2, \qquad T_3 = -B_1^3 + 3B_1B_2.$$

Ma per ipotesi dovrebbe essere

$$S_2 = T_2, \qquad S_3 = T_3,$$

quindi

(3) $$B_1^2 - 2B_2 = A_1^2 - 2A_2,$$

(4) $$B_1^3 - 3B_1B_2 = A_1^3 - 3A_1A_2.$$

Ora si noti che, per il teor. di BASTIEN ([3]), non potrebbe essere $S_1 = T_1$; pertanto si potrebbe supporre, dovendo essere uno dei due T_1, S_1 maggiore dell'altro

$$T_1 = S_1 + h, \qquad h > 0,$$

e quindi

(5) $$B_1 = A_1 - h, \qquad h > 0,$$

Se ora si moltiplicassero membro a membro (3) e (5) e sottraessimo poi la (4), avremmo

$$3!\left(A_2 - \frac{A_1}{2!}h + \frac{1}{3!}h^2\right) = 0$$

e questa è impossibile, perchè nelle ipotesi fatte l'espression[e t]ra parentesi è > 0,

2. Procedendo nello stesso modo, con analogo simbolismo, si avrebbbe che, affinchè i sistemi

$$x_1^k + x_2^k + x_3^k = y_1^k + y_2^k + y_3^k, \qquad (k = 2,\ 3,\ 4);$$
$$x_1^k + \dots + x_4^k = y_1^k + \dots + y_4^k, \qquad (k = 2, \dots, 5);$$
$$x_1^k + \dots + x_5^k = y_1^k + \dots + y_5^k, \qquad (k = 2, \dots, 6);$$

([3]) Cfr. BASTIEN, *Sphinx-Oedipe*, (1913), p. 131. Tale teor. si enuncia così: *Il sistema*

(I) $$x_1^k + \dots + x_p^k = y_1^k + \dots + y_p^k, \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

non ammette soluz. intere non banali per $p \leq n$.

Anzi, più in generale (I), *per* $p \leq n$, *è impossibile, se non con soluzioni banali, nel campo reale.*

fossero possibili, dovrebbe aversi identicamente e rispettivamente

$$(6) \qquad -4!\left(A_3 - \frac{1}{2!}A_2h + \frac{1}{3!}A_1h^2 - \frac{1}{4!}h^3\right) = 0;$$

$$(7) \qquad 5!\left(A_4 - \frac{1}{2!}A_3h + \frac{1}{3!}A_2h^2 - \frac{1}{4!}A_1h^3 + \frac{1}{5!}h^4\right) = 0;$$

$$(8) \qquad -6!\left(A_5 - \frac{1}{2!}A_4h + \frac{1}{3!}A_3h^2 - \frac{1}{4!}A_2h^3 + \frac{1}{5!}A_1h^4 - \frac{1}{6!}h^5\right) = 0;$$

che non sono soddisfatte, se a_i, b_i sono reali concordi. Quindi *i sistemi* (2) *per* m $= 2$ *ed* n $= 2, 3, 4, 5$, *sono impossibili, con soluzioni non banali, per valori reali e concordi delle incognite.*

3. Per induzione si stabilisce subito la corrispondente proposizione generale.

Infatti, poichè la relazione analoga alle (6), (7), (8), per il caso generale di n qualsiasi, come si induce appunto dalle (6), (7), (8), è la seguente

$$(n+1)!\left[A_n - \frac{1}{2!}A_{n-1}h + \frac{1}{3!}A_{n-2}h^2 - \dots \pm \frac{1}{(n+1)!}h^n\right] = 0,$$

si ha che *il sistema* (2) *per* m $= 2$, n *qualsiasi, è impossibile, se non con soluzioni banali, per valori reali e concordi delle incognite.*

4. Consideriamo ora in (2) il caso $m = 3$.

Se a_i, b_i, $(i = 1, 2)$, fosse una soluzione in numeri reali concordi e positivi di

$$(9) \qquad x_1^k + x_2^k = y_1^k + y_2^k, \qquad (k = 3, 4),$$

con analoghe posizioni del n. 1 si avrebbe intanto, essendo ora

$$S_k = T_k, \qquad (k = 3, 4).$$

$$(10) \qquad 2S_3 - 3S_1S_2 + S_1^3 = 0, \qquad 2S_3 - 3T_1T_2 + T_1^3 = 0,$$

sottraendole

$$(11) \qquad 3(T_1T_2 - S_1S_2) + S_1^3 - T_1^3 = 0.$$

Si noti poi che non potrebbe essere $S_1 = T_1$, perchè, se così fosse, essendo

$$a_1^k + a_2^k = b_1^k + b_2^k, \qquad (k = 1, 3).$$

dovremmo avere anche

$$a_1^k + a_2^k + (-b_1)^k + (- \quad\quad = b_1^k + b_2^k + (-a_1)^k + (-a_2)^k,$$
$$(k = 1, 2, 3, 4),$$

e è assurdo per il te IEN. D'altra parte non si potrebbe avere $S_2 = T_2$, perchè allora si contraddirebbe al teor. stabilito al n. 1.

Pertanto supposto al solito $T_1 > S_1$ e posto

$$(12) \qquad T_1 = S_1 + h, \qquad h > 0$$

$$(13) \qquad T_2 = S_2 + k, \qquad k \gtrless 0,$$

si avrebbe che la (11), a mezzo delle (12), (13) potrebbe scriversi

$$(14) \qquad 3(S_1 + h)k + 3(S_2 - S_1^2)h - (3S_1 + h)h^2 = 0.$$

Ma d'altronde si avrebbe

$$S_4 + A_1S_3 + A_2S_2 = 0. \qquad T_4 + B_1T_3 + B_2T_2 = 0$$

ed esse, per le (9), (12) e (13), darebbero

$$(15) \quad (2S_3 - 2S_1S_2 - S_2h)h - (S_1^2 - 2S_2 + 2S_1h + h^2)k + k^2 = 0;$$

quindi eliminando k fra le (14) e (15) si trarrebbe, a semplificazioni effettuate e non opportune trasformazioni

$$- 18S_1(S_1^2 - S_2)^2 + 9(S_1^2 - S_2)(S_2 - 5S_1^2)h + 24S_1(S_2 - 2S_1^2)h^2 - \\ - 30S_1^2h^3 - 12S_1h^4 - 2h^5 = 0,$$

che nelle ipotesi fatte è assurda, perchè tutti i termini del 1° membro sono negativi.

Pertanto il *sistema* (9) *è impossibile in numeri reali concordi, se non si considerano le soluzioni banali.*

5. In particolare dai risultati dei numeri precedenti si trae che *il sistema* (2) *per* m $= 2$, n *qualsiasi e per* m $= 3$. n $= 2$ *è impossibile in numeri interi e positivi, se si prescinde dalle soluzioni banali.*

6. Infine gli stessi risultati ci portano a *congetturare che il sistema* (2). *per* m *ed* n *qualsiasi. non ammette soluzioni, se non banali, nel campo dei numeri reali e concordi ed in particolare in quello degli interi positivi.*

D' altra parte (2), per $m = 1$ ed n qualsiasi, è impossibile per il teor. di Bastien, se non con soluzioni banali, nel campo reale.

7. Se i sistemi di cui ci siamo occupati sono impossibili nel campo dei numeri reali concordi, non altrettanto invece si può dire dei seguenti

$$(16) \qquad x_1^k + \dots + x^k_{n+1} = y_1^k + \dots + y^k_{n+1}, \quad (k = m, m+1, \dots, m+n-1),$$

in cui in ogni membro vi sono $n + 1$ termini invece degli n di ciascun membro della (2).

Difatti del sistema (16) per $m = 2$, $n = 2$, si conoscono varie soluzioni parametriche [4], e se ne ha una in numeri reali, per $m = 2$, $n = 3$, perchè si ha identicamente

$$(5\sqrt{6} + 15)^k + (\sqrt{6} + 20)^k + (\sqrt{6} + 10)^k + (-3\sqrt{6} + 5)^k =$$
$$= (5\sqrt{6} + 10)^k + (3\sqrt{6} + 20)^k + (-\sqrt{6} + 5)^k + (-\sqrt{6} + 15)^k,$$

per $k = 2, 3, 4$.